PC* 2023-24 corrigé DS 4 Centrale / Mines



Mines-Ponts 2003 - PC 1 : corrigé.

# PARTIE 1

**1.** Puisque $\ln F$ est convexe, on peut lui appliquer les inégalités rappelées au début de l'énoncé ; on obtient d'abord, avec $x_1 = n-1, x_2 = n$ et $x_3 = n+x$ : $\ln F(n) - \ln F(n-1) \leqslant \dfrac{\ln F(n+x) - \ln F(n)}{x}$. Puisque $0 < x < 1$ on peut poser ensuite $x_1 = n, x_2 = n+x$ et $x_3 = n+1$ ; on obtient : $\dfrac{\ln F(n+x) - \ln F(n)}{x} \leqslant \ln F(n+1) - \ln F(n)$.

**2.** Montrons par récurrence que pour $n \geqslant 1$, $F(n) = (n-1)!$ ; c'est vrai pour $n = 1$ par (iii) ; si $F(n) = (n-1)!$, on déduit par (i) que $F(n+1) = nF(n) = n(n-1)! = n!$.

La question 1. donne $x \ln(n-1) \leqslant \ln F(n+x) - \ln(n-1)! \leqslant x \ln n$ d'où $(n-1)^x (n-1)! \leqslant F(n+x) \leqslant n^x (n-1)!$.

**3.** Montrons par récurrence que pour $p \geqslant 1$, $F(p+x) = (x+p-1)...(x+1)xF(x)$ ; c'est vrai pour $p = 1$ par (i) ; si c'est vrai pour $p$, on déduit par (i) que $F(x+p+1) = (x+p)F(x+p) = (x+p)(x+p-1)...(x+1)xF(x)$.

**4.** Utilisons 2. : $n^x n! = n^x (n-1)! n \geqslant nF(n+x) = n(n+x-1)...xF(x)$ d'où la première inégalité. En changeant $n$ en $n+1$ dans 2. on obtient : $n^x n! \leqslant F(n+1+x) = (x+n)...xF(x)$ d'où la seconde inégalité.

**5.** La suite $u_n(x)$ est encadrée par 2 suites qui convergent vers la même limite $F(x)$, elle converge donc aussi vers $F(x)$.

**6.** Pour $x > 1$, posons $x = p + y$ avec $p$ entier et $0 \leqslant y < 1$.

$$u_n(p+y) = \frac{n^{p+y} n!}{(p+y)...(p+y+n)} = u_n(y) \frac{n^p}{(y+n+1)...(y+n+p)} y(y+1)...(y+p-1).$$

La fraction a pour limite 1 quand $n$ tend vers l'infini, donc $u_n(x) = u_n(p+y)$ a pour limite $F(y)y(y+1)...(y+p-1)$ c'est à dire $F(p+y) = F(x)$.

**7.** L'unicité de $F$ résulte de l'unicité de la limite de la suite $u_n(x)$.

**8.** Au voisinage de $t = 0$, $t^{x-1} e^{-t} \sim \dfrac{1}{t^{1-x}}$ qui est intégrable sur $]0,1[$ ssi $x > 0$. Au voisinage de $t = +\infty$, $t^{x-1} e^{-t} = o(\dfrac{1}{t^2})$ qui est intégrable sur $]1, +\infty[$. En conclusion, $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ ssi $x > 0$.

**9.** $\Gamma$ est donc définie sur $]0, +\infty[$ et strictement positive puisque $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est continue et strictement positive

10) $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \ln t \, e^{-t} dt$

11) a) $$\int_a^b t^{x-1} e^{-t} \ln t \, dt = \int_a^b \left(t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}}\right)\left(t^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \ln t\right) dt$$

on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $[a,b]$

$$\left(\int_a^b t^{x-1} e^{-t} \ln t \, dt\right)^2 \leq \int_a^b \left(t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2}\right)^2 dt \int_a^b \left(t^{\frac{x-1}{2}} e^{-t/2} \ln t\right)^2 dt$$

$$\left(\int_a^b t^{x-1} e^{-t} \ln t \, dt\right)^2 \leq \int_a^b e^{-t} t^{x-1} dt \int_a^b t^{x-1} e^{-t} \ln^2 t \, dt$$

b) $a \to 0$ $b \to +\infty$ ces intégrales convergent

(resp vers $\Gamma(x)$, $\Gamma'(x)$, $\Gamma''(x)$)

par passage à la limite $a \to 0$, $b \to +\infty$

$$\left(\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln t \, dt\right)^2 \leq \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \ln^2 t \, dt$$

soit $\underline{(\Gamma'(x))^2 \leq \Gamma(x)\,\Gamma''(x) \quad \forall x>0}$

c) montrons que $\Gamma$ vérifie les bonnes hypothèses.

$\Gamma$ est bien définie sur $]0,+\infty[$, strictement positive

montrons que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$ $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$

$$\Gamma(x+1)=\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt$$

IPP : $u=t^x$ $\quad u'=xt^{x-1}$ $\quad u,v$ $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$v'=e^{-t}$ $\quad v=-e^{-t}$

$u(t)v(t)=-t^x e^{-t} \to 0$ $(t\to 0)$ car $x>0$

$\to 0$ $(t\to\infty)$ par croissances comparées

donc $\Gamma(x+1)=\left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty}+x\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$

$\underline{\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)}$ donc <u>i) est vérifié</u>

posons $H(x)=\ln\Gamma(x)$

$H$ est bien $C^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions $C^2$

$\forall x>0$ $\quad H'(x)=\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ $\quad$ et $H''(x)=\dfrac{\Gamma''(x)\Gamma(x)-(\Gamma'(x))^2}{\Gamma^2(x)}\geq 0$

d'après b)

donc $H$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

<u>le point ii) est vérifié</u>

$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt=1$ donc le point <u>iii) est vérifier</u>

$\Gamma$ vérifie les mêmes hypothèses que $F$

$F$ est unique d'après 7) donc $\underline{\Gamma=F}$

**12.** $\ln u_n(x)=x\ln n-\ln x-\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\frac{x+k}{k}=g_n(x)$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g_n(x)=\ln\Gamma(x)$.

**13.** Pour $n\geqslant 2$, $v_n(x)=x\ln n-x\ln(n-1)-\ln(1+\frac{x}{n})$ donc $v_n'(x)=\ln n-\ln(n-1)-\dfrac{1}{x+n}=-\ln(1-\frac{1}{n})-\dfrac{1}{x+n}=\frac{1}{n}+O(1/n^2)-\dfrac{1}{x+n}=O(1/n^2)$. $(\sum v_n(x))$ est donc convergente.

Soit $0<a<b$; pour $x\in[a,b]$, $v_n'(a)\leqslant v_n'(x)\leqslant v_n'(b)$ d'où $|v_n'(x)|\leqslant|v_n'(a)|+|v_n'(b)|$ qui est le terme général d'une série convergente. Il y a convergence normale (donc uniforme) sur tout segment $[a,b]$ de la série $(\sum v_n'(x))$.

3

**14.** Puisque $v_n$ est de classe $C^1$, que $(\sum v_n(x))$ converge simplement et que $(\sum v_n'(x))$ converge uniformément sur tout $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on peut dériver terme à terme la série $(\sum v_n(x))$. Comme $g_n(x)$ est la somme partielle à l'ordre $n$, on a donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n'(x) = (\ln\Gamma(x))' = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

**15.** $g_n'(x) = \ln n - \frac{1}{x} - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x+k}$ donc $g_n'(1) = \ln n - 1 - \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+k} = -\dfrac{1}{1+n} - (\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} - \ln n)$ qui a pour limite $\dfrac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = -\gamma$ quand $n$ tend vers $+\infty$ ; on a donc $\boxed{\Gamma'(1) = -\gamma}$

## PARTIE 2

**16.** Le théorème spécial des séries alternées s'applique immédiatement car $\dfrac{1}{(2n+1)^s}$ tend vers 0 en décroissant puisque $s > 0$.

17) $x \in [0,1]$ $\quad h_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^s} x^{2n+1}$ $\quad s>0$ fixé

$\sum h_n$ vérifie le TSSA $\quad R_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^s} x^{2k+1}$

$\forall x \in [0,1] \quad |R_n(x)| \leq \dfrac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)^s} \leq \dfrac{1}{(2n+3)^s}$

$\|R_n\|_\infty^{[0,1]} \leq \dfrac{1}{(2n+3)^s} \to 0 \ (n\to+\infty)$

$\sum h_n$ CU sur $[0,1]$

$\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)} x^{2n+1}$

montrons que $\varphi$ est $C^1$ sur $[0,1[$

$h_n : x \mapsto \dfrac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

$\sum h_n$ CS sur $[0,1]$ (car CU)

$h_n$ est $C^1$ $\quad h_n'(x) = (-1)^n x^{2n} = (-x^2)^n$

soit $[a,b] \subset [0,1[$

$|h_n'(x)| \leq |a|^{2n} \to \|h_n'\|_\infty^{[a,b]} \leq |a|^{2n}$, $|a|<1$

donc $\sum \|h_n'\|_\infty^{[a,b]}$ converge

$\sum h_n'$ CN donc CU sur tout $[a,b] \subset [0,1[$

donc $\varphi$ est $C^1$ sur $[0,1[$

et $\forall x \in [0,1[ \quad \varphi'(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \dfrac{1}{1+x^2}$

donc $\varphi(x) = \text{Arctan}\, x + \text{cste}$

$\varphi(0) = 0$ donc $\forall x \in [0,1[$ $\varphi(x) = \text{Arctan}\, x$

or $\sum k_n$ CU sur $[0,1]$ et $k_n$ est continue

donc $\varphi$ est continue sur $[0,1]$

donc $\varphi(x) \to \varphi(1)$ $(x \to 1)$ donc $\varphi(1) = \frac{\pi}{4}$

$\forall x \in [0,1]$ $\varphi(x) = \text{Arctan}\, x$

$L(1) = \varphi(1) = \frac{\pi}{4}$

**18.** $h_s'(x) = \dfrac{1 - s\ln x}{x^{s+1}}$ est positive ssi $x \leqslant x_s = \mathrm{e}^{1/s}$ donc $h_s$ est croissante sur $]0, x_x[$ et décroissante sur $]x_s, +\infty[$. La fonction $s \mapsto \mathrm{e}^{1/s}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

**19.** $L(s) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n(s)$ avec $w_n(s) = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$ et cette série converge simplement sur $]0, +\infty[$. $w_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et $w_n'(s) = \dfrac{(-1)^{n-1}\ln(2n+1)}{(2n+1)^s}$. Montrons que la série $(\sum w_n'(s))$ converge uniformément sur tout segment $[a,b] \subset ]0, +\infty[$. Soit $s \in [a,b]$. $(\sum w_n'(s))$ est une série alternée qui vérifie les hypothèses du théorème spécial pour $n \geqslant n_0$ avec $2n_0 + 1 \geqslant \mathrm{e}^{1/a}$ : en effet on a alors $2n+1 \geqslant \mathrm{e}^{1/s}$, donc la suite $|w_n'(s)| = h_s(2n+1)$ est décroissante ; de plus elle tend vers 0. On peut alors majorer la valeur absolue du reste à l'ordre $n$ par $\dfrac{\ln(2n+3)}{(2n+3)^a}$ qui tend uniformément vers 0. On en déduit que $L$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que $L'(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\ln(2n+1)}{(2n+1)^s}$.

En particulier, $L'(1) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\ln(2n+1)}{2n+1}$.

**20.** Effectuons le changement de variable $u = nt$ : $I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{nt} t^{s-1} dt = \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^u u^{s-1}}{n^s} du = \dfrac{\Gamma(s)}{n^s}$.

**21.** Considérons la série de terme général $u_n(t) = (-1)^n \mathrm{e}^{-(2n+1)t} t^{s-1}$ et appliquons le théorème de convergence dominée sur $]0, +\infty[$ :

- $u_n$ est continue sur $]0, +\infty[$.
- $(\sum u_n(t))$ converge simplement vers $\dfrac{\mathrm{e}^{-t} t^{s-1}}{1 + \mathrm{e}^{-2t}}$ continue sur $]0, +\infty[$ (série géométrique de raison $-\mathrm{e}^{-2t}$).
- Les sommes partielles vérifient une condition de domination : $|S_n(t)| = |\dfrac{(1 - (-\mathrm{e}^{-2t})^{(n+1)})}{1 + \mathrm{e}^{-2t}} \mathrm{e}^{-t} t^{s-1}| \leqslant \mathrm{e}^{-t} t^{s-1}$ qui est une fonction continue et intégrable sur $]0, +\infty[$.

On peut alors intégrer terme à terme : $\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-t} t^{s-1}}{1 + \mathrm{e}^{-2t}} dt = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathrm{e}^{-(2n+1)t} t^{s-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{\Gamma(s)}{(2n+1)^s} = L(s)\Gamma(s)$.

**22.** Effectuons d'abord le changement de variable défini par $t = \ln u$ (bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]1, \infty[$ sur $]0, \infty[$ : $\displaystyle\int_0^{\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-t}(\ln t)}{1 + \mathrm{e}^{-2t}} dt = \int_1^{\infty} \dfrac{\ln(\ln u)}{1 + u^2} du$. Puis effectuons le changement de variable défini par $u = \tan x$ (bijection strictement croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]\pi/4, \pi/2[$ sur $]1, \infty[$) : $\displaystyle\int_1^{\infty} \dfrac{\ln(\ln u)}{1 + u^2} du = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln(\ln(\tan x)))dx = I$. On en déduit : $I = \dfrac{d}{ds}(L(s)\Gamma(s))|_{s=1} = L'(1)\Gamma(1) + L(1)\Gamma'(1) = L'(1) - \frac{\pi}{4}\gamma$.

Troisième partie d'après Centrale PSI 2011

$h(t) = t - \lfloor t \rfloor - \frac{1}{2}$ $\forall X \in \mathbb{R}_+$ $H(X) = \int_0^X h(t)dt$

23) formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi}\sqrt{n}\dfrac{n^n}{e^n}$

donc $\dfrac{n!\ e^n}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}\ n^n} \to 1 \ (n \to +\infty)$

en passant au logarithme :

$\ln n! + n - \ln\sqrt{2\pi} - \ln\sqrt{n} - n\ln n \to 0 \ (n \to +\infty)$

$\ln n! + n - \ln\sqrt{2\pi} - \frac{1}{2}\ln n - n\ln n = o(1) \ (n \to +\infty)$

donc $\ln n! = (n+\frac{1}{2})\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi} + o(1) \quad (n \to +\infty)$

24) $h(t+1) = t+1 - \lfloor t+1 \rfloor - \frac{1}{2} = t+1 - \lfloor t \rfloor - 1 - \frac{1}{2} = h(t)$

h est 1-périodique

sur $[0,1]$ : $\forall t \in [0,1[$ $h(t) = t - \frac{1}{2}$ $h(1) = -\frac{1}{2}$

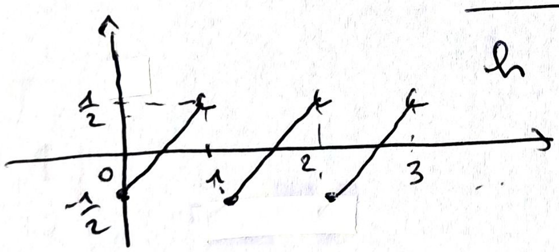
h est continue sur $[0,1[$

si $t \to 1^-$ $\lfloor t \rfloor = 0 \to 0$ $h(t) \to \frac{1}{2}$

h admet une limite finie en $1^-$

donc h est cpm sur $[0,1]$

par périodicité, h est cpm sur $\mathbb{R}^+$




h est bornée sur $[0,1]$ car elle est cpm

donc h est bornée sur $\mathbb{R}^+$ par périodicité.

$\forall t \in \mathbb{R}$ $0 \leq t - \lfloor t \rfloor \leq 1$ donc $-\frac{1}{2} \leq h(t) \leq \frac{1}{2}$

25) h est cpm sur $\mathbb{R}^+$ donc $X \mapsto \int_0^X h(t)dt$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

(généralisation du TFA aux fonctions cpm) de plus $H$ est dérivable en tout point où $h$ est continue c'est à dire en tous les points non entiers.

sur $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$ $H$ est dérivable et $H'(x) = h(x)$

$h$ est continue en tout point de $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$

donc $H'$ aussi

donc $H$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$

26) $n \in \mathbb{N}$

$$H(n) = \int_0^n h(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} (t - \lfloor t \rfloor - \tfrac{1}{2})dt$$

$$H(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} (t-k-\tfrac{1}{2})dt = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \frac{(t-k)^2}{2} - \frac{1}{2}t \right]_k^{k+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(k+1) + \frac{1}{2}k \right) = \sum_{k=0}^{n-1} 0 = 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $H(n) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $n = \lfloor x \rfloor$

$$H(x) = \underbrace{\int_0^n h(t)dt}_{=0} + \int_n^x h(t)dt = \int_n^x (t-n-\tfrac{1}{2})dt$$

$$H(x) = \left[ \frac{(t-n)^2}{2} - \frac{1}{2}t \right]_n^x = \frac{(x-n)^2}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}n = \frac{(x-n)}{2}(x-n-1)$$

$$H(x) = \frac{(x - \lfloor x \rfloor)}{2}(x - \lfloor x \rfloor - 1)$$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$ $\quad 0 \leq x - \lfloor x \rfloor \leq 1$ donc $-1 \leq x - \lfloor x \rfloor - 1 \leq 0$

$$0 \leq -(x - \lfloor x \rfloor - 1) \leq 1$$

$0 \leq -2H(x) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{2} \leq H(x) \leq 0$

$H$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$

27) $x > 0$ $\quad t \mapsto \dfrac{H(t)}{(t+x)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}+$

$t \to +\infty$ $\quad |H(t)| \leq M$ car $H$ est bornée

$$\left| \frac{H(t)}{(t+x)^2} \right| \leq \frac{M}{t^2} \qquad t \mapsto \frac{M}{t^2} \text{ est intégrable en } +\infty$$

donc $t \mapsto \dfrac{H(t)}{(t+x)^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}+$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{H(t)}{(t+x)^2}\,dt$ converge

28) $X \in \mathbb{R}+$, $n = \lfloor X \rfloor$

$$\int_0^X \frac{h(t)}{t+x}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{h(t)}{t+x}\,dt + \int_n^X \frac{h(t)}{t+x}\,dt$$

on effectue une IPP sur chaque intégrale

$u' = h(t)$ $\quad u = H(t)$ $\quad u, v$ $C^1$ sur $]k, k+1[$

$v = \dfrac{1}{t+x}$ $\quad v' = -\dfrac{1}{(t+x)^2}$ $\quad$ et sur $]n, X[$

$$\int_0^X \frac{h(t)}{t+x}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \left( \left[\frac{H(t)}{t+x}\right]_k^{k+1} + \int_k^{k+1} \frac{H(t)}{(t+x)^2}\,dt \right) + \left[\frac{H(t)}{t+x}\right]_n^X + \int_n^X \frac{H(t)}{(t+x)^2}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{H(t)}{(t+x)^2}\,dt + \frac{H(X)}{X+x} + \int_n^X \frac{H(t)}{(t+x)^2}\,dt$$

[remarque : on ne pouvait pas effectuer directement une IPP sur $\displaystyle\int_0^X \frac{h(t)}{t+x}\,dt$ car $u, v$ ne sont pas $C^1$ sur $[0, X]$ )

donc $\displaystyle\int_0^X \frac{h(t)}{t+x}\,dt = \int_0^X \frac{H(t)}{(t+x)^2}\,dt + \frac{H(X)}{X+x}$

29) $X \to +\infty$ $\quad \dfrac{H(X)}{X+x} \to 0$ car $H$ est bornée

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{H(t)}{(t+x)^2}\,dt$ converge (27) donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h(t)}{t+x}\,dt$ converge et par passage à la limite $(x \to \infty)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{h(t)}{t+x}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{H(t)}{(t+x)^2}\,dt$$

30) posons $J_x = \int_{x+i}^{x+i+1} \ln t \, dt$

changement de variable $u = t - x$ (cht affine)

$du = dt$

$$J_x = \int_i^{i+1} \ln(u+x)\,du$$

IPP : $A = \ln(u+x)$ $A' = \frac{1}{u+x}$ $A, B$ $C^1$ sur $[i, i+1]$

$B' = 1$ $B = u - i - 1$

$$J_x = \left[\ln(u+x)(u-i-1)\right]_i^{i+1} - \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x}\,du$$

$$\int_{x+i}^{x+i+1} \ln t\,dt = \ln(x+i) - \int_i^{i+1} \frac{u-i-1}{u+x}\,du$$

---

on somme pour $i$ allant de $0$ à $n$

$$\int_x^{x+n+1} \ln t\,dt = \sum_{i=0}^{n} \ln(x+i) - \sum_{i=0}^{n} \int_i^{i+1} \frac{h(u) - \frac{1}{2}}{u+x}\,du$$

$$\int_x^{x+n+1} \ln t\,dt = \sum_{i=0}^{n} \ln(x+i) - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x}\,du + \frac{1}{2}\int_0^{n+1} \frac{du}{u+x} \quad (*)$$

---

$$F_n(x) = (x+1)\ln n + \ln n! - \sum_{i=1}^{n+1} \ln(x+i)$$

$$F_n(x) = (x+1)\ln n + \ln n! - \sum_{i=0}^{n} \ln(x+i) - \ln(x+n+1) + \ln x$$

on utilise $(*)$ pour remplacer $\sum_{i=0}^{n} \ln(x+i)$ dans l'expression.

$$F_n(x) = (x+1)\ln n + \ln n! - \int_x^{x+n+1} \ln t\, dt - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x}\,du + \frac{1}{2}\int_0^{n+1} \frac{du}{u+x}$$
$$- \ln(x+n+1) + \ln x$$

$$F_n(x) = (x+1)\ln n + \ln n! - \left[t\ln t - t\right]_x^{x+n+1} - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x}\,du$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\ln(u+x)\right]_0^{n+1} - \ln(x+n+1) + \ln x$$

$$F_n(x) = (x+1)\ln n + \ln n! - (x+n+1)\ln(x+n+1) + x+n+1$$
$$+ x\ln x - x - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x}\,du + \frac{1}{2}\ln(x+n+1) - \frac{1}{2}\ln x$$
$$- \ln(x+n+1) + \ln x$$

$$F_n(x) = (x+1)\ln n + \ln n! - \left(x+n+\frac{3}{2}\right)\ln(x+n+1) + n+1$$
$$+ \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x}\,du$$

---

3.1) on remplace $\ln n!$ par son développement (2.3)).

$$F_n(x) = (x+1)\ln n + \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n + \ln\sqrt{2\pi} + o(1)$$
$$-\left(x+n+\frac{3}{2}\right)\ln(x+n+1) + n+1 + \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x}\,du$$

$$F_n(x) = \left(x+n+\frac{3}{2}\right)\ln n + \ln\sqrt{2\pi} + o(1) - \left(x+n+\frac{3}{2}\right)\ln(x+n+1) + 1$$
$$+\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x}\,du$$

$$F_n(x) = -\left(x+n+\frac{3}{2}\right)\ln\left(1+\frac{x+1}{n}\right) + \ln\sqrt{2\pi} + o(1) + 1 + \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln x - \int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x}\,du$$

si $n \to +\infty$ $\quad \ln\left(1+\frac{x+1}{n}\right) \sim \frac{x+1}{n}$

$$-\left(x+n+\frac{3}{2}\right)\ln\left(1+\frac{x+1}{n}\right) \sim -(x+1) \to -(x+1) \quad (n\to+\infty)$$

$o(1) \to 0$ $(n \to +\infty)$ et $\displaystyle\int_0^{n+1} \frac{h(u)}{u+x}\,du \to \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\,du$

donc par passage à la limite ($n \to +\infty$)

$$\ln(\Gamma(x+1)) = -(x+1) + \ln\sqrt{2\pi} + 1 + (x+\tfrac{1}{2})\ln x - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\,du$$

$$\ln(\Gamma(x+1)) = (x+\tfrac{1}{2})\ln x - x + \ln\sqrt{2\pi} - \int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\,du$$

---

32) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\,du = \int_0^{+\infty} \frac{H(u)}{(u+x)^2}\,du$

$H$ est bornée $\Rightarrow \forall u \quad |H(u)| \leq M.$

$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\,du\right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{|H(u)|}{(u+x)^2}\,du \leq M \int_0^{+\infty} \frac{du}{(u+x)^2}$$

$$\leq M \left[\frac{-1}{u+x}\right]_0^{+\infty} = \frac{M}{x}$$

$\forall x > 0 \quad \displaystyle\left|\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\,du\right| \leq \frac{M}{x}$

donc $\displaystyle x \mapsto x\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\,du$ est bornée

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\,du = O\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to +\infty)$

donc

$$\ln(\Gamma(x+1)) = (x+\tfrac{1}{2})\ln x - x + \ln\sqrt{2\pi} + O\left(\tfrac{1}{x}\right) \quad (x \to +\infty)$$

---

33) $\forall X \in \mathbb{R}_+ \qquad K(X) = \displaystyle\int_0^X H(t)\,dt$

a) TFA : $H$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $K$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$

› $K(X) = -\frac{1}{12}X + B(X)$. $\quad B$ fonction bornée.

b) $A_x = \int_0^{+\infty} \frac{H(t)}{(t+x)^2}\,dt$

IPP $\quad u' = H(t) \quad u = K(t)$

$v = \frac{1}{(t+x)^2} \quad v' = \frac{-2}{(t+x)^3}$

$u, v$ $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$

$uv \to 0 \quad (t \to +\infty)$

$$A_x = \left[\frac{K(t)}{(t+x)^2}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2K(t)}{(t+x)^3}\,dt$$

$\frac{K(t)}{(t+x)^2} \sim \frac{-\frac{1}{12}t}{t^2} = \frac{-1}{12t}$

$t \to +\infty$

$$\int_0^{+\infty} \frac{H(t)}{(t+x)^2}\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{2K(t)}{(t+x)^3}\,dt \qquad (K(0)=0)$$

c) $$-\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{(u+x)}\,du = -\int_0^{+\infty} \frac{H(u)}{(u+x)^2}\,du = -\int_0^{+\infty} \frac{2K(t)}{(t+x)^3}\,dt$$

$$= -\int_0^{+\infty} \frac{-\frac{1}{6}t + 2B(t)}{(t+x)^3}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{6}(t+x) - \frac{1}{6}x - 2B(t)}{(t+x)^3}\,dt$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^2} - \frac{1}{6}x\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^3} - 2\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{B(t)}{(t+x)^3}\,dt}_{=O\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

(majorer $|B(t)|$ par une constante)

$$-\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\,du = \frac{1}{6}\left[\frac{-1}{t+x}\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{6}x\left[\frac{-1}{2(t+x)^2}\right]_0^{+\infty} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\frac{1}{x} - \frac{1}{12}\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$-\int_0^{+\infty} \frac{h(u)}{u+x}\,du = \frac{1}{12}\frac{1}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

donc $\ln(\Gamma(x+1)) = (x+\frac{1}{2})\ln x - x + \ln\sqrt{2\pi} + \frac{1}{12x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \to +\infty)$