PC* 2024-2025

Programme de colle N°8 : semaine du 18 novembre au 23 novembre

*Suites et séries de fonctions (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)
-Suites de fonctions : convergence simple ,révision du théorème de convergence dominée
Convergence uniforme . Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues , interversion limite intégrale , th de dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions de classe C^1 , extension aux fonctions de classe C^k
-Séries de fonctions : convergence simple , convergence uniforme, convergence normale, uniforme sur tout segment, normale sur tout segment
-Continuité de la somme
-Théorème de dérivation terme à terme (pour des fonctions de classe C^1 et plus généralement pour des fonctions de classe C^k)
-Théorème de la double limite : Supposons que $\sum f_n$ converge uniformément sur un intervalle I , a étant une borne de I (éventuellement infinie). Supposons que $\forall n \quad f_n$ admet une limite finie l_n en a alors $\sum l_n$ converge et $\lim\limits_{x\to a}\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} l_n$
-Révision de la technique d'encadrement d'une série par des intégrales
-Théorème d'intégration terme à terme sur un segment
-Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque. Si le théorème ne marche pas, on peut essayer d'appliquer le th de convergence dominée sur les sommes partielles ou les restes de la série.

*Questions de cours

1) Soit $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{e^{-(n-1)x}}{n}$. Montrer que la série de fonctions converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

2) Soit $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ .Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$

3) Soit $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{Arc\tan(nx)}{n^2}$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$

4) Soit $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+x)^2}$ .Déterminer un équivalent de f en $+\infty$ (encadrement par des intégrales)

5) Montrer que $\forall x\in\left]-1,1\right[\quad \ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ (en intégrant terme à terme $\sum(-1)^n x^n$)

6) Montrer que $\int_0^1 \dfrac{\ln t}{1-t}dt=-\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$

A suivre : Début des espaces vectoriels normés