PC* 2024-2025

Programme de colle N°9 : semaine du 25 novembre au 30 novembre

*Séries de fonctions : dérivation et intégration terme à terme

- Théorème de dérivation terme à terme (pour des fonctions de classe C^1 et plus généralement pour des fonctions de classe C^k)

-Théorème d'intégration terme à terme sur un segment. Théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque. Si le théorème ne marche pas, on peut essayer d'appliquer le th de convergence dominée sur les sommes partielles ou les restes de la série.

*Espaces vectoriels normés (1ière partie)

-Norme sur un $K-$espace vectoriel , distance , distance associée à une norme .Exemples fondamentaux de normes sur K^n , sur $C([a,b],K)$, sur $K[X]$, sur $M_{n,1}(\mathbb{R})$, sur $M_n(\mathbb{R})$

-Norme euclidienne construite à partir d'un produit scalaire réel .

-Boules , parties bornées .Applications bornées de A dans E si E est un evn .Définition de la norme infinie d'une telle application .

-Parties convexes

-Normes équivalentes , non équivalentes . Dans un evn de dimension finie , toutes les normes sont équivalentes (admis)

-Suites dans un evn , limite d'une suite , opérations sur les limites , convergence de suites extraites .Utilisation de suites pour montrer que 2 normes ne sont pas équivalentes .En dimension finie , équivalence de la convergence de la suite et de ses suites coordonnées dans une base . Suites de matrices dans $M_p(K)$

*Questions de cours

1) $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{n+1}$ .Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Montrer que $\forall x \in]-1,1[\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$

3) Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

4) Dans un espace vectoriel normé de dimension finie , équivalence de la convergence d'une suite et de ses suites coordonnées dans une base

5) Définition d'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si $(\setminus)$ est un produit scalaire sur E , l'application $x \mapsto \sqrt{(x \setminus x)}$ est une norme sur E (norme euclidienne)

6) Dans $M_p(K)$ si $A_n \to A \ (n \to +\infty)$ alors $\det(A_n) \to \det(A) \ (n \to +\infty)$

A suivre : réduction