PC* 2023-24 corrigé DM N°3

d'après Mines MP

$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n dt$

1) $W_n - W_{n+1} = \int_0^{\pi/2} ((\sin t)^n - \sin t^{n+1}) dt$

$= \int_0^{\pi/2} (\sin t)^n (1-\sin t) dt$

$t \mapsto (\sin t)^n (1-\sin t)$ est >0 sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ (et continue)

donc son intégrale est >0

(c'est ≥ 0 et si l'intégrale était nulle, comme la fonction est ≥ 0 et continue, la fonction serait nulle)

donc $\forall n \quad W_n > W_{n+1}$

donc (W_n) est strictement $\downarrow$

on pose $f_n : t \mapsto (\sin t)^n$ pour $t \in [0,\frac{\pi}{2}[$

$f_n(t) \to 0 \quad (n\to+\infty)$ pour $t \in [0,\frac{\pi}{2}[$ et f_n cpm

(f_n) CS vers la fonction nulle sur $[0,\frac{\pi}{2}[$

et $\forall t \in [0,\frac{\pi}{2}[\quad |f_n(t)| \leq 1$

$t \mapsto 1$ est cpm positive et intégrable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$

donc d'après le th de convergence dominée

$W_n \to 0 \quad (n \to +\infty)$

2) $\forall f \in E \quad u(f)$ est C^∞ d'après le texte.

donc $u(f) \in E$

de plus $\forall f,g \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\forall x \in I \quad u(\alpha f+g)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\alpha f+g)(x \sin t) dt$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \alpha f(x\sin t) dt + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} g(x \sin t) dt = \alpha u(f)(x) + u(g)(x)$

donc $u(\alpha f+g) = \alpha u(f) + u(g)$

donc $\underline{u \in \mathcal{L}(E)}$

idem pour v (linéarité de la dérivation)

3) $\forall f \in E \quad N(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

N est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$

- Si $N(f)=0$ alors $\underbrace{\|f\|_\infty}_{\geq 0} + \underbrace{\|f'\|_\infty}_{\geq 0} = 0$

donc $\|f\|_\infty = 0$ donc $f=0$ (car $\| \ \|_\infty$ est une norme)

- $\alpha \in \mathbb{R}$

$N(\alpha f) = \|\alpha f\|_\infty + \|\alpha f'\|_\infty = |\alpha| \, \|f\|_\infty + |\alpha| \, \|f'\|_\infty$
$= |\alpha| N(f)$

- $f, g \in E$

$N(f+g) = \|f+g\|_\infty + \|f'+g'\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|g'\|_\infty$

car $\| \ \|_\infty$ est une norme

donc $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$

donc $\underline{N \text{ est une norme sur } E}$

on a clairement $\|f\|_\infty \leq N(f)$

réciproquement, si on considère $f_n : t \mapsto t^n$ sur I

$\|f_n\|_\infty = |a|^n$

$f_n'(t) = n t^{n-1} \qquad \|f_n'\|_\infty = n|a|^{n-1}$

$N(f_n) = |a|^{n-1}(|a|+n)$

$$\frac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty} = \left(1 + \frac{n}{|a|}\right) \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

le quotient $\dfrac{N(f_n)}{\|f_n\|_\infty}$ est non borné

donc $\underline{N \text{ et } \| \ \|_\infty \text{ ne sont pas équivalentes}}$

4) $f \in E$

$\forall x \in I \quad |u(f)(x)| = \frac{2}{\pi} \left| \int_0^{\pi/2} f(x \sin t)\,dt \right|$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |f(x\sin t)|\,dt \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \|f\|_\infty\,dt$$

$\forall x \in I \quad |u(f)(x)| \leq \|f\|_\infty$ (remarquons que si $x \in I$ alors $x \sin t \in I$)

par passage à la borne sup

$$\underline{\|u(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty} \quad (1)$$

d'après la tente $(u(f))'(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin t\, f'(x \sin t)\,dt$

donc $\forall x \in I \quad |u(f)'(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \underbrace{|\sin t|}_{\leq 1} \|f'\|_\infty\,dt$

$$|u(f)'(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \|f'\|_\infty\,dt$$

$\Rightarrow \quad |u(f)'(x)| \leq \|f'\|_\infty \quad \forall x \in I$

$\Rightarrow \quad \underline{\|(u(f))'\|_\infty \leq \|f'\|_\infty} \quad (2)$

en additionnant (1) et (2)

on obtient $\underline{N(u(f)) \leq N(f)}$

$\forall x \in I \quad v(f)(x) = f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin t)\,dt$

$$|v(f)(x)| \leq |f(0)| + |x| \int_0^{\pi/2} \|f'\|_\infty\,dt$$

$$|v(f)(x)| \leq \|f\|_\infty + a \frac{\pi}{2} \|f'\|_\infty$$

car $|f(0)| \leq \|f\|_\infty$

et $|x| \leq a$

par passage à la borne sup $\underline{\|v(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty + a\frac{\pi}{2} \|f'\|_\infty}$

par exemple, on peut en déduire que

$$\|v(f)\|_\infty \leq (1+a\tfrac{\pi}{2})\|f\|_\infty + (1+a\tfrac{\pi}{2})\|f'\|_\infty$$

donc $\underline{\|v(f)\|_\infty \leq c\,N(f)}$ avec $\underline{c = 1+a\tfrac{\pi}{2}}$

les 3 inégalités suivantes viennent de la linéarité de u et v.

$\forall f \in E \quad \|u(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty$

donc $\forall f, g \in E \quad \|u(f-g)\|_\infty \leq \|f-g\|_\infty$

par linéarité

$$\underline{\|u(f)-u(g)\|_\infty \leq \|f-g\|_\infty}$$

idem pour les 2 autres inégalités.

5) $P_k(x) = x^k$

$$u(P_k)(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}(x\sin t)^k\,dt = \frac{2}{\pi}x^k W_k$$

$u(P_k)(x) = \frac{2}{\pi}W_k P_k(x)$ vrai $\forall x \in I$

donc $\underline{u(P_k) = \frac{2}{\pi}W_k P_k}$ et $P_k \neq 0$

donc $\underline{P_k \text{ est un vecteur propre de } u \text{ associé à la valeur propre } \tfrac{2}{\pi}W_k}$

$k \geq 1$

$$v(P_k)(x) = 0 + x\int_0^{\pi/2}k(x\sin t)^{k-1}\,dt = x^k\int_0^{\pi/2}k(\sin t)^{k-1}\,dt$$

$v(P_k)(x) = k\,W_{k-1}P_k(x)$ vrai $\forall x \in I$

donc $\underline{v(P_k) = k\,W_{k-1}P_k}$

$\underline{P_k \text{ est un vecteur propre de } v \text{ associé à } k\,W_{k-1}}$ $(k \geq 1)$

si $k=0$ $\quad P_0(x)=1 \quad \forall x$

$P_0'=0$

donc $\quad v(P_0)(x)=1+x\int_0^{\pi/2} 0\,dt=1=P_0(x)$

$v(P_0)=P_0$ donc P_0 est un vecteur propre de v associé à 1

Soit $f\in \mathcal{P}\ell_n$

f est une fonction polynôme de degré $\leq n$

$\exists a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ tq $\quad f=\sum_{k=0}^{n} a_k P_k$

$u(f)=\sum_{k=0}^{n} a_k u(P_k)$ par linéarité

$u(P_k)=\frac{2}{\pi}W_k P_k \qquad u(f)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\pi}W_k a_k P_k\in\mathcal{P}\ell_n$

(car $\deg P_k=k$)

donc $\mathcal{P}\ell_n$ est stable par u

idem $\mathcal{P}\ell_n$ est stable par v

si $f\in\mathcal{P}\ell$, alors $\exists n\in\mathbb{N}$, $f\in\mathcal{P}\ell_n$ $\quad(n=\deg f)$

donc $u(f)\in\mathcal{P}\ell_n$ donc $u(f)\in\mathcal{P}\ell$.

$\mathcal{P}\ell$ est stable par u et de la même façon stable par v

6) $\forall k\geq 1$

$u\circ v(P_k)=u(kW_{k-1}P_k)=kW_{k-1}u(P_k)=\frac{2}{\pi}kW_{k-1}W_kP_k$

or $\forall k\geq 1 \quad \frac{2}{\pi}kW_{k-1}W_k=1$ donc $u\circ v(P_k)=P_k$

pour $k=0$: $\quad u\circ v(P_0)=u(P_0)=\frac{2}{\pi}W_0P_0=P_0 \quad$ car $W_0=\frac{\pi}{2}$

idem $v\circ u(P_k)=P_k$

donc $\forall n\in\mathbb{N} \quad u\circ v(P_n)=v\circ u(P_n)=P_n$

Soit $f \in \mathcal{P}\ell$

$n = \deg f$ $\quad f = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$

$u \circ v(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, u \circ v(P_k)$ par linéarité de $u \circ v$

$= \sum_{k=0}^{n} a_k P_k = f$

donc $\underline{\forall f \in \mathcal{P}\ell \quad u \circ v(f) = f}$

idem $\underline{\forall f \in \mathcal{P}\ell \quad v \circ u(f) = f}$

7) $f \in E$, $f' \in E$ f' est continue sur I

donc d'après le th de Weierstrass,

il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}\ell$ qui CU vers f' sur I

Soit f_n l'unique primitive de g_n qui vérifie $f_n(0) = f(0)$

$\int_0^x (f_n'(t) - f'(t))\,dt = f_n(x) - f(x) - f_n(0) + f(0)$

d'après le TFA

or $f_n(0) = f(0)$

donc $\underline{\int_0^x (f_n'(t) - f'(t))\,dt = f_n(x) - f(x)}$

$|f_n(x) - f(x)| \leq \int_0^x |f_n'(t) - f'(t)|\,dt \leq \left|\int_0^x \|f_n' - f'\|_\infty \,dt\right|$

$\forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| \leq |x| \, \|f_n' - f'\|_\infty$

$|x| \leq a$ pour $x \in I$

donc $\underline{\forall x \in I \quad |f_n(x) - f(x)| \leq a \, \|f_n' - f'\|_\infty}$

par passage à la borne sup

$\underline{\|f_n - f\|_\infty \leq a \, \|f_n' - f'\|_\infty}$

$n \to \infty$ $\quad \|f_n' - f'\|_\infty \to 0$ car (f_n') CU vers f'

donc $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ $\quad$ donc $\underline{(f_n) \text{ CU vers } f}$

$$N(f_n - f) = \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\to 0} + \underbrace{\|f_n' - f'\|_\infty}_{\to 0} \quad (n \to +\infty)$$

donc $N(f_n - f) \to 0 \ (n \to +\infty)$

8) $\|u \circ v(f_n) - u \circ v(f)\|_\infty \leq \|v(f_n) - v(f)\|_\infty \leq c\, N(f_n - f)$ d'après 4)

$c\, N(f_n - f) \to 0 \ (n \to +\infty)$

donc $\|u \circ v(f_n) - u \circ v(f)\|_\infty \to 0 \ (n \to +\infty)$

or $u \circ v(f_n) = f_n$ car $f_n \in \mathcal{P}\ell$

donc $\|f_n - u \circ v(f)\|_\infty \to 0 \ (n \to +\infty)$

donc $f_n \to u \circ v(f) \ (n \to +\infty)$ par $\| \ \|_\infty$

mais $f_n \to f \ (n \to +\infty)$ par $\| \ \|_\infty$

donc par unicité de la limite : $f = u \circ v(f)$

de la même façon

$\|v \circ u(f_n) - v \circ u(f)\|_\infty \leq c\, N(u(f_n) - u(f)) \leq c\, \underbrace{N(f_n - f)}_{\to 0 \ (n \to +\infty)}$

donc $\|v \circ u(f_n) - v \circ u(f)\|_\infty \to 0 \ (n \to +\infty$

$v \circ u(f_n) = f_n \to v \circ u(f) \ (n \to +\infty)$

et $f_n \to f$

donc par unicité de la limite : $v \circ u(f) = f$

c'est vrai $\forall f \in E$ donc $u \circ v = Id_E = v \circ u$

donc u et v sont bijectives et $v = u^{-1}$

0 n'est pas valeur propre de u et de v

(car u et v bijectives)

9) $\lambda \in \mathbb{R}^*$

($\Rightarrow$) Supposons $\lambda \in Sp(u)$

alors $\exists f \in E$, $f \neq 0$ $u(f) = \lambda f$

$v\circ u(f) = \lambda v(f)$

or $v\circ u = Id_E$ donc $\lambda v(f) = f$

$v(f) = \frac{1}{\lambda} f$ car $\lambda \neq 0$

donc $\frac{1}{\lambda} \in Sp(v)$

($\Leftarrow$) : idem en échangeant les rôles de u et v.

donc $\underline{\lambda \in Sp(u) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in Sp(v)}$

10) $\forall k \in \mathbb{N}$ $u(P_k) = \frac{2}{\pi} W_k P_k$ (cf 5))

pour $k \in [\![0,n]\!]$ $P_k \in \mathcal{P}l_n$ donc $u_n(P_k) = \frac{2}{\pi} W_k P_k$

donc P_k est un vecteur propre de u_n associé à $\frac{2}{\pi} W_k$

toutes les valeurs de $\frac{2}{\pi} W_k$ sont distinctes pour $k \in [\![0,n]\!]$

car (W_k) est strictement $\searrow$ d'après 1)

donc on a trouvé $n+1$ valeurs propres de u_n

or $\dim \mathcal{P}l_n = n+1$

donc u_n a au plus $n+1$ valeurs propres

donc on a trouvé toutes les vp de u_n

$\underline{Sp(u_n) = \left\{ \frac{2}{\pi} W_k \mid k \in [\![0,n]\!] \right\}}$

<u>le sous espace propre de u_n associé à $\frac{2}{\pi} W_k$ est $Vect(P_k)$</u>

(tous les sep sont de dim 1 car les vp sont simples).

11) $u(f) = \lambda f$

a) $\forall k \in \mathbb{N}$ $(u(f))^{(k)} = \lambda f^{(k)}$

or $(u(f))^{(k)}_{(x)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} (\sin t)^k f^{(k)}(x \sin t)\,dt$ d'après le texte

$|(u(f))^{(k)}(x)| \leq \frac{2}{\pi} \| f^{(k)} \|_\infty \int_0^{\pi/2} (\sin t)^k dt$

$\forall x \in I \quad |(u(f))^{(k)}(x)| \leq \frac{2}{\pi} W_k \|f^{(k)}\|_\infty$

par passage à la borne sup

$$\|(u(f))^{(k)}\|_\infty \leq \frac{2}{\pi} W_k \| f^{(k)}\|_\infty$$

or $(u(f))^{(k)} = \lambda f^{(k)}$

$$\| \lambda f^{(k)}\|_\infty \leq \frac{2}{\pi} W_k \| f^{(k)}\|_\infty$$

$|\lambda| \| f^{(k)}\|_\infty \leq \frac{2}{\pi} W_k \|f^{(k)}\|_\infty$ (car $\| \|_\infty$ est une norme)

b) supposons $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $f^{(k)} \neq 0$

donc $\| f^{(k)}\|_\infty \neq 0$

donc $|\lambda| \leq \frac{2}{\pi} W_k \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$

mais $W_k \to 0$ $(k \to +\infty)$ d'après 1)

donc par passage à la limite $(k \to +\infty)$

$|\lambda| = 0$ donc $\lambda = 0$

pas possible car 0 n'est pas vp de u (cf 8))

contradiction

donc $\exists k \in \mathbb{N}^*, f^{(k)} = 0$

par primitivations successive, f est donc une fonction polynôme (de degré $\leq k-1$)

(par récurrence, on peut montrer que $f^{(k-i)}$ est une fonction polynôme de degré $\leq i$)

donc $f \in \mathcal{P}\ell$

c) $n = \deg f$ $\quad u(f) = \lambda f$

$f \in \mathcal{H}_n$ $\quad u_n(f) = \lambda f$

f est donc un vecteur propre de u_n

les vp de u_n sont $\frac{2W_k}{\pi}$ $\quad k \in [\![0,n]\!]$

donc $\exists k \in [\![0,n]\!]$ tq $\lambda = \frac{2W_k}{\pi}$ donc $f \in \mathrm{Vect}(P_k)$

(les sep de u_n sont $\mathrm{Vect}(P_k)$, $k \in [\![0,n]\!]$)

$\exists \alpha \in \mathbb{R}^*$, $f = \alpha P_k$

mais $\deg f = n$ donc $k = n$

donc $\underline{\exists \alpha \in \mathbb{R}^*, f = \alpha P_n}$ $\qquad \underline{\lambda = \frac{2W_n}{\pi}}$

12) $\underline{Sp(u) = \left\{ \frac{2W_n}{\pi} \mid n \in \mathbb{N} \right\}}$

le sous-espace propre de u associé à $\frac{2W_n}{\pi}$ est $\mathrm{Vect}(P_n)$

d'après 9) $\quad \underline{Sp(v) = \left\{ \frac{\pi}{2W_n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}}$

dans 9) on a montré que

$\lambda \in Sp(u) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in Sp(v)$

avec les mêmes vecteurs propres

$\left(u(f) = \lambda f \Leftrightarrow v(f) = \frac{1}{\lambda} f \right)$

donc le sous espace propre de v associé à $\frac{\pi}{2W_n}$ est $\mathrm{Vect}(P_n)$