PC* 2024-2025

Programme de colle N°11 : semaine du 9 décembre au 14 décembre

Réduction des endomorphismes (en dimension finie) et des matrices carrées

-Endomorphismes et matrices diagonalisables : un endomorphisme est diagonalisable ssi il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale . Une matrice est diagonalisable ssi elle est semblable à une matrice diagonale (ssi l'endomorphisme associé est diagonalisable) .
Un endomorphisme u est diagonalisable ssi il existe une base formée de vecteurs propres ssi E est la somme directe des sous espaces propres ssi dimE est la somme des dimensions des sous espaces propres (idem sur les matrices)
Un endomorphisme ayant n valeurs propres distinctes dans un espace de dimension n est diagonalisable .Un endomorphisme est diagonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé et la dimension de chaque sous espaces propre est égal à l'ordre de multiplicité de la valeur propre (idem pour une matrice) .

-Endomorphismes et matrices trigonalisables : un endomorphisme est trigonalisable ssi il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure , une matrice est trigonalisable ssi elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure . Un endomorphisme est trigonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé (même résultat pour les matrices). Toute matrice est trigonalisable sur $\mathbb{C}$

- Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées .

$(\alpha P+Q)(A)=\alpha P(A)+Q(A)$ et $(PQ)(A)=P(A)Q(A)$

$(\alpha P+Q)(u)=\alpha P(u)+Q(u)$ et $(PQ)(u)=P(u)\circ Q(u)$. $\mathrm{Im}\big(P(u)\big)$ et $Ker\big(P(u)\big)$ sont stables par u

Si λ est une valeur propre de A alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$ (idem pour les endomorphismes)

-Polynôme annulateur d'une matrice, d'un endormorphisme, application au calcul de l'inverse et des puissances de cette matrice (resp de cet endomorphisme)

- Le spectre d'une matrice (resp d'un endomorphisme) est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur .

-Un endomorphisme u est diagonalisable ssi il annule un polynôme simplement scindé ssi il annule $\prod_{\lambda\in Sp(u)}(X-\lambda)$ (idem sur les matrices)

-Si u est diagonalisable ,l'endomorphisme induit par u sur un sev stable est diagonalisable.

Questions de cours

1) Un endomorphisme est diagonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé et la dimension de chaque sous espaces propre est égal à l'ordre de multiplicité de la valeur propre

2) Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

3) Soit $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ a^2-7a & a-7 & a \end{pmatrix}$ avec $a\in\mathbb{R}$. A est-elle diagonalisable ?

4) Si λ est une valeur propre de A alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$

Le spectre d'une matrice est inclus dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur .

5) $M\in M_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $M^2+2M+5I_{2n}=0$. Montrer que M est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Calculer $Tr(M)$ et $\det(M)$

6) Soit A une matrice de rang 1. Montrer que $A^2=tr(A)A$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $tr(A)\neq 0$

A suivre : Révisions et compléments sur les équations différentielles, début des probas