Corrigé de la composition de mathématiques - C - (ULCR)

Session de 2015

Partie I

1)a. L'application $x \longmapsto e^{-x^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$, donc l'application A est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, avec:

$$\forall t \geq 0,\ A'(t) = 2\, e^{-t^2} \int_0^t e^{-x^2}\, \mathrm{d}x.$$

Pour tout $a > 0$, l'application $\varphi : [0, a] \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$\forall (t, x) \in [0, a] \times [0, 1],\ \varphi(t, x) = -\frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1 + x^2}$$

vérifie les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe $\int$

- pour tout $t \in [0, a]$, $x \longmapsto \varphi(t, x)$ est continue par morceaux (et intégrable sur $[0, 1]$;
- pour tout $x \in [0, 1]$, $t \longmapsto \varphi(t, x)$ est de classe C^1 sur $[0, a]$;
- pour tout $t \in [0, a]$, $x \longmapsto \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x)$ est continue par morceaux;
- pour tout $(t, x) \in [0, a] \times [0, 1]$, $\left|\dfrac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x)\right| = 2te^{-t^2(1+x^2)} \leq 2a$ et l'application $t \longmapsto 2a$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0, 1]$.

On en déduit que B est de classe C^1 sur chaque $[0, a]$, donc sur $[0, +\infty[$, avec:

$$\forall t \geq 0,\ B'(t) = 2t \int_0^1 e^{-t^2(1+x^2)}\, \mathrm{d}x = 2e^{-t^2} \int_0^1 e^{-(tx)^2} \mathrm{d}(tx)$$

Le changement de variable $y = tx$ donne donc $A'(t) = B'(t)$ pour tout $t > 0$, égalité qui reste valable quand $t = 0$.

1)b. Il existe ainsi une constante K telle que $A(t) = B(t) + K$ pour tout $t \geq 0$: nous obtenons en particulier $K = A(0) - B(0) = \dfrac{\pi}{4}$. D'autre part, $B(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$:

$$|B(t)| \leq e^{-t^2} \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\, \mathrm{d}x \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0.$$

On en déduit que $A(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \dfrac{\pi}{4}$, ce qui donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, puis:

$$\int_{\mathbb{R}} G(x)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-(x/\sqrt{2})^2}\, \mathrm{d}(x/\sqrt{2}) = 1.$$

2) On applique la méthode de la variation de la constante: la fonction $x \longmapsto e^{x^2/2}$ est une base de l'espace des solutions de l'équation homogène $y' - xy = 0$ et on pose $\varphi : \ x \longmapsto A(x)e^{x^2/2}$. la nouvelle fonction inconnue A étant une fonction dérivable. φ est solution de l'équation étudiée si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R},\ A'(x) = e^{-x^2/2}g(x).$$

Comme g est bornée sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto e^{-x^2/2}g(x)$ est sommable au voisinage de $-\infty$ et les solutions de l'équation sont les applications de la forme $x \longmapsto Ae^{x^2/2} + e^{x^2/2}\displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}g(y)\,\mathrm{d}y$ où A est une constante réelle quelconque.

3) Comme la fonction $f - \langle f\rangle$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction proposée est solution de l'équation différentielle $y' - xy = f - \langle f\rangle$. On en déduit que φ est dérivable et que $\varphi' : x \longmapsto x\varphi(x) + f(x) - \langle f\rangle$ est continue.

On a d'autre part, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (en remarquant que les intégrales écrites sont convergentes, puisque f est bornée):

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x^2/2}\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}(f(y) - \langle f\rangle)\,\mathrm{d}y - \int_{x}^{+\infty} e^{-y^2/2}(f(y) - \langle f\rangle)\,\mathrm{d}y\right) \\ &= -e^{x^2/2}\int_{x}^{+\infty} e^{-y^2/2}(f(y) - \langle f\rangle)\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

puisque $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}(f(y) - \langle f\rangle)\,\mathrm{d}y = \sqrt{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}} G(y)f(y)\,\mathrm{d}y - \langle f\rangle\right) = 0.$

4) Nous avons $(x-y)^2 \geq 0$, soit $-\dfrac{y^2}{2} \leq -\dfrac{x^2}{2} - x(y-x)$, ce qui donne l'inégalité demandée par croissance de la fonction exponentielle.

Pour $x \in]-\infty, -1]$, nous avons en utilisant l'inégalité précédente:

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leq e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\underbrace{|f(y) - \langle f\rangle|}_{\leq 2\|f\|_\infty}\,\mathrm{d}y \\ &\leq 2\|f\|_\infty \int_{-\infty}^{x} e^{-x(y-x)}\,\mathrm{d}y \\ &= 2\|f\|_\infty \left[\frac{e^{-x(y-x)}}{-x}\right]_{-\infty}^{x} \\ &= \frac{2\|f\|_\infty}{|x|} \\ &\leq \frac{4\|f\|_\infty}{1+|x|} \end{aligned}$$

car $\dfrac{2}{|x|} \leq \dfrac{4}{1+|x|}$ quand $|x| \geq 1$.

Pour $x \in [-1, 0]$, nous avons cette fois:

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| &\leq 2\|f\|_\infty e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y \\ &\leq 2\|f\|_\infty e^{1/2}\int_{-\infty}^{0} e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y \\ &= 2\|f\|_\infty e^{1/2}\frac{\sqrt{2\pi}}{2} \\ &\leq \frac{2\|f\|_\infty\sqrt{2\pi e}}{1+|x|} \end{aligned}$$

car $1+|x| \leq 2$.

En utilisant la formule $\varphi(x) = -e^{x^2/2}\int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}(f(y) - \langle f\rangle)\,\mathrm{d}y$, nous obtenons des résultats similaires pour $x \geq 0$, ce qui donne:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\varphi(x)| \leq \frac{C_0'\|f\|_\infty}{1+|x|}$$

avec $C_0' = \max(4, 2\sqrt{2\pi e}) = 2\sqrt{2\pi e}$. La relation $C_0 \leq 2\sqrt{2\pi e}$ demandée par l'énoncé laisse entendre que C_0 désigne, comme aux questions suivantes, la plus petite valeur (indépendante de x et de f) vérifiant l'inégalité demandée.

On en déduit que φ' est bornée:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\varphi'(x)| = |x\varphi(x) + f(x) - \langle f\rangle| \leq \frac{|x|}{1+|x|}C_0\|f\|_\infty + 2\|f\|_\infty \leq (C_0+2)\|f\|_\infty.$$

5) En posant $y = x+s$, nous obtenons pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= -e^{x^2/2}\int_x^{+\infty} e^{-y^2/2}(f(y) - \langle f\rangle)\,\mathrm{d}y \\ &= -e^{x^2/2}\int_0^{+\infty} e^{-(x+s)^2/2}(f(x+s) - \langle f\rangle)\,\mathrm{d}s \\ &= -\int_0^{+\infty} e^{-s^2/2}e^{-sx}(f(x+s) - \langle f\rangle)\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

On applique une nouvelle fois facilement le théorème de dérivation sous $\int$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \varphi'(x) = -\int_0^{+\infty} e^{-s^2/2}e^{-sx}f'(x+s)\,\mathrm{d}s + \int_0^{+\infty} se^{-s^2/2}e^{-sx}\left(f(x+s) - \langle f\rangle\right)\mathrm{d}s.$$

Séparons une nouvelle fois les cas:

Pour $x \geq 1$, nous avons:

$$|\varphi'(x)| \leq \|f'\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-sx}\,\mathrm{d}s + 2\|f\|_\infty \int_0^{+\infty} se^{-s^2/2}\,\mathrm{d}s = \frac{\|f\|_\infty}{x} + \frac{2\|f\|_\infty}{x^2}$$

Comme $\frac{1}{x} \leq \frac{2}{1+x}$ et $\frac{1}{x^2} \leq \frac{2}{1+x}$ sur $[1, +\infty[$, nous en déduisons que

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{2\|f'\|_\infty + 4\|f\|_\infty}{1+x} \leq \frac{4(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)}{1+x}.$$

Pour $x \in [0,1]$, nous avons:

$$|\varphi'(x)| \leq \|f'\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-s^2/2}\,\mathrm{d}s + 2\|f\|_\infty \int_0^{+\infty} se^{-s^2/2}\,\mathrm{d}s = \|f'\|_\infty\frac{\sqrt{2\pi}}{2} + 2\|f\|_\infty \leq \frac{4\left(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right)}{1+x}$$

car $1+x \leq 2$.

On travaille de la même façon avec $x \leq 0$, en partant de la formule $\varphi(x) = \int_{-\infty}^0 e^{-s^2/2}e^{-sx}\left(f(s+x) - \langle f\rangle\right)\mathrm{d}s$, ce qui donne:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ (1+|x|)\varphi'(x)| \leq 4\left(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty\right)$$

Ceci prouve l'existence de C_1, avec $C_1 \leq 4 = C_1'$.

Remarque: cette méthode peut être reprise pour obtenir plus naturellement une majoration de $(1+|x|)\varphi(x)$ qui est meilleure que celle de la question 4. On a en effet:

$$\forall x \in [0,1], \quad |\varphi(x)| \le 2\|f\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-s^2/2}\,dx = \|f\|_\infty \sqrt{2\pi} \le \frac{2\sqrt{2\pi}\,\|f\|_\infty}{1+x}$$

$$\forall x \ge 1, \quad |\varphi(x)| \le 2\|f\|_\infty \int_0^{+\infty} e^{-sx}\,dx = \frac{2\|f\|_\infty}{x} \le \frac{4\,\|f\|_\infty}{1+x}.$$

6) Comme $\varphi' : x \longmapsto x\varphi(x) + f(x) - \langle f\rangle$, φ est de classe C^2 et φ'' est bornée:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\varphi''(x)| \le \frac{C_0'\,\|f\|_\infty}{1+|x|} + \frac{|x|\,C_1'\,(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)}{1+|x|} + \|f'\| \le C_2'\,(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)$$

avec $C_2' = \max(C_0' + C_1', 1 + C_1') = 2\sqrt{2\pi e} + 4$, qui est donc un majorant de la constante optimale C_2.

Partie II

1) Comme φ et φ' sont continues et bornées, les fonctions $G\varphi$ et $G\varphi'$ sont sommables sur $\mathbb{R}$. L'intégration par parties:

$$\int_{\mathbb{R}} G(x)\varphi'(x)\,dx = \Big[G(x)\varphi(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} G'(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} xG(x)\varphi(x)\,dx$$

est donc valide et donne l'égalité demandée.

2) On applique les résultat de la partie I.4 à f: la fonction $\varphi : x \longmapsto e^{x^2/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}(f(y) - \langle f\rangle)\,dy$ est de classe C^1 avec φ et φ' bornées. On en déduit:

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)(f(x) - \langle f\rangle)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g_n(x)(h'(x) - xh(x))\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Comme $\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\langle f\rangle\,dx = \langle f\rangle$, cela donne:

$$\int_{\mathbb{R}} g_n(x)f(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{\mathbb{R}} G(x)f(x)\,dx.$$

3) Notations et remarques

Par hypothèse, la fonction $x \longmapsto x^2 g_n(x)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Par comparaison, pour toute fonction ψ continue sur $\mathbb{R}$ et telle que $\psi(x) = O(x^2)$ au voisinage de $\pm\infty$, la fonction $\psi\, g_n$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$ et donc sur tout sous-intervalle de $\mathbb{R}$. Cela prouve que toutes les intégrales qui suivent existent au sens propre.

Par hypothèse aussi, il existe une constante $K_1 > 0$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad 0 \le \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g_n(x)\,dx \le K_1.$$

En prenant f constante égale à 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\,dx = 1$$

III

1) Si X est une VAD bornée, $\exists M>0$ $|X|\leq M$

c'est à dire $X(\Omega)\subset[-M,M]$

$X(\Omega)=\{x_i \mid i\in\mathbb{N}\}\subset[-M,M]$ $|x_i|\leq M$

donc $|x_i P(X=x_i)|\leq M P(X=x_i)$

$\sum P(X=x_i)$ converge par def donc par comparaison $\sum x_i P(X=x_i)$ conv absolument

donc $E(X)$ existe.

2) $\forall x\in\mathbb{R}$ $\varphi'(x)-x\varphi(x)=f(x)-\langle f\rangle$

donc $\varphi'(Z_n)-Z_n\varphi(Z_n)=f(Z_n)-\langle f\rangle$

$\Rightarrow E(\varphi'(Z_n)-Z_n\varphi(Z_n))=E(f(Z_n)-\langle f\rangle)$

(toutes les espérances existent car comme les fonctions f, φ, $x\mapsto x\varphi(x)$ sont bornées alors $\varphi'(Z_n)$, $Z_n\varphi(Z_n)$ et $f(Z_n)$ sont bornées

3) Taylor Lagrange à φ : $\forall x,x_0\in\mathbb{R}$

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)+(x-x_0)\varphi'(x_0)+\int_{x_0}^{x}\frac{(t-x)}{1!}\varphi''(t)dt$$

(φ est C^2 et φ'' est bornée)

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)-(x-x_0)\varphi'(x_0)|\leq\|\varphi''\|_\infty\left|\int_{x_0}^{x}(t-x)dt\right|$$

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)-(x-x_0)\varphi'(x_0)|\leq\|\varphi''\|_\infty\frac{|x-x_0|^2}{2}$$

d'après I 6) on a $\|\varphi''\|_\infty\leq C_2(\|f\|+\|f'\|_\infty)$

donc $\forall(x,x_0)\in\mathbb{R}^2$ $|\varphi(x)-\varphi(x_0)-(x-x_0)\varphi'(x_0)|\leq\frac{|x-x_0|^2}{2}C_2(\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty)$

on l'applique à Z_n et $Z_{n,i}$

$$|\varphi(Z_n)-\varphi(Z_{n,i})-(Z_n-Z_{n,i})\varphi'(Z_{n,i})|\leq\frac{(Z_n-Z_{n,i})^2}{2}C_2(\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty)$$

$Z_n-Z_{n,i}=\frac{X_i}{\sqrt{n}}$ et on multiplie par $|X_i|$

$$|X_i\varphi(Z_n)-X_i\varphi(Z_{n,i})-\frac{X_i^2}{\sqrt{n}}\varphi'(Z_{n,i})|\leq\frac{|X_i|^3}{2n}C_2(\|f\|_\infty+\|f'\|_\infty)$$

4) Comme $X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires discrètes et indépendantes, alors quelle que soit la fonction ψ, X_i et $\psi(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes (lemme dit des coalitions). En particulier, X_i et

$$\varphi(Z_{n,i}) = \varphi\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{i-1} + X_{i+1} + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}\right)$$

sont indépendantes, de même que X_i et $\varphi'(Z_{n,i})$. Comme ces variables sont bornées, elles sont d'espérance finie et

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X_i\varphi(Z_{n,i})) &= \mathbf{E}(X_i)\mathbf{E}(\varphi(Z_{n,i})) = 0, \\
\mathbf{E}(X_i^2\varphi'(Z_{n,i})) &= \mathbf{E}(X_i^2)\mathbf{E}(\varphi'(Z_{n,i})) = \mathbf{V}(X_i)\mathbf{E}(\varphi'(Z_{n,i})) = \mathbf{E}(\varphi'(Z_{n,i}))
\end{aligned}$$

puisque X_i est centrée et réduite.

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} X_i\varphi(Z_n) - X_i\varphi(Z_{n,i}) - \frac{X_i^2}{\sqrt{n}}\varphi'(Z_{n,i})\right) = \mathbf{E}(Z_n\varphi(Z_n)) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(\varphi'(Z_{n,i}))$$

et d'après l'inégalité de la moyenne et **III.3**

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{E}(Z_n\varphi(Z_n)) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(\varphi'(Z_{n,i}))\right| &\leq \mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\left|X_i\varphi(Z_n) - X_i\varphi(Z_{n,i}) - \frac{X_i^2}{\sqrt{n}}\varphi'(Z_{n,i})\right|\right) \\
&\leq \frac{C_2}{2}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathbf{E}(|X_i|^3)}{n} \\
&\leq \frac{C_2}{2}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{E}(|X_1|^3)
\end{aligned}$$

puisque les X_i sont toutes de même loi.

Comme X_1 est bornée par M, alors $\mathbf{P}(|X_1|^3 \leq M X_1^2) = 1$, donc $\mathbf{E}(|X_1|^3) \leq M\mathbf{E}(X_1^2) = M\mathbf{V}(X_1) = M$ puisque X_1 est centrée et réduite, d'où l'inégalité demandée.

5) Nous avons cette fois, pour $i \in [1, n]$:

$$|\varphi'(Z_n) - \varphi'(Z_{n,i})| \leq \frac{|X_i|}{\sqrt{n}}C_2(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left|E(\varphi'(Z_n)) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(\varphi'(Z_{n,i}))\right| &= \left|E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varphi'(Z_n) - \varphi'(Z_{n,i})\right)\right| \\
&\leq \frac{C_2}{\sqrt{n}}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(|X_i|)
\end{aligned}$$

Comme X_i et $\mathbf{1}$ sont des variables aléatoires bornées, elles sont de carré intégrable et d'après l'inégalité de Schwarz, leur produit est intégrable et

$$\mathbf{E}(|X_i|) \leq \sqrt{\mathbf{E}(X_i^2)}\sqrt{\mathbf{E}(\mathbf{1})} = \mathbf{V}(X_i) = 1$$

puisque X_i est centrée et réduite, d'où l'inégalité demandée.

6) Le résultat est une conséquence directe des questions précédentes:

$$\mathbf{E}(f(Z_n)) - \int_{\mathbb{R}} f(x)G(x)\,\mathrm{d}x = \mathbf{E}(f(Z_n)) - \langle f\rangle = \mathbf{E}(f(Z_n) - \langle f\rangle)$$

donc

$$\begin{aligned}
\left|\mathbf{E}(f(Z_n)) - \int_{\mathbb{R}} f(x)G(x)\,\mathrm{d}x\right| &= |\mathbf{E}(\varphi'(Z_n)) - \mathbf{E}(Z_n\varphi(Z_n))| \\
&\leq \left|\mathbf{E}(\varphi'(Z_n)) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(\varphi'(Z_{n,i}))\right| + \left|\mathbf{E}(Z_n\varphi(Z_n)) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}(\varphi'(Z_{n,i}))\right| \\
&\leq \frac{C_2(1 + \frac{1}{2}M)}{\sqrt{n}}(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)
\end{aligned}$$

7) $\varepsilon > 0$ $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]-\infty, a-\varepsilon] \\ 0 & \text{si } x \in [a, +\infty[\\ \text{polynome de degré 3 sur } [a-\varepsilon, a] \end{cases}$

pour que f soit continue en a et $a-\varepsilon$ il faut que

$f(a-\varepsilon) = 1$, $f(a) = 0$

pour que f soit dérivable en a et $a-\varepsilon$ il faut

que $f'(a-\varepsilon) = 0$ et $f'(a) = 0$

a est racine double de f

$x \in [a-\varepsilon, a]$ $f(x) = (x-a)^2(\alpha x + \beta)$ assure que $f(a) = f'(a) = 0$

(1) $f(a-\varepsilon) = \varepsilon^2(\alpha(a-\varepsilon) + \beta) = 1$

$f'(x) = 2(x-a)(\alpha x + \beta) + (x-a)^2 \alpha$

(2) $f'(a-\varepsilon) = -2\varepsilon(\alpha(a-\varepsilon) + \beta) + \varepsilon^2 \alpha = 0$

(1) : $\varepsilon^2(a-\varepsilon)\alpha + \varepsilon^2 \beta = 1$

(2) $(-2\varepsilon a + 3\varepsilon^2)\alpha - 2\varepsilon\beta = 0$

après calcul : $\alpha = \dfrac{2}{\varepsilon^3}$, $\beta = \dfrac{3\varepsilon - 2a}{\varepsilon^3}$

$f(x) = \dfrac{1}{\varepsilon^3}(x-a)^2(2x + 3\varepsilon - 2a)$ pour $x \in [a-\varepsilon, a]$

---

f' est une fonction polynômiale de degré 2 qui s'annule en $a-\varepsilon$ et a

f et f' sont continues sur $[a-\varepsilon, a]$ donc bornées sur $[a-\varepsilon, a]$ et constantes sur $]-\infty, a-\varepsilon]$ et sur $[a, +\infty[$ donc bornées sur $\mathbb{R}$.

f' est de signe constant sur $[a-\varepsilon, a]$ (parabole qui s'annule en $a-\varepsilon$ et a)

si $f' \geq 0$ sur $[a-\varepsilon, a]$, f est croissante
contradiction avec les valeurs en $a-\varepsilon$ et a

donc $f' \leq 0$ sur $[a-\varepsilon, a]$, f est décroissante sur $[a-\varepsilon, a]$

donc $\|f\|_\infty = 1$

$f' = 0$ sur $]-\infty, a-\varepsilon] \cup [a, +\infty[$

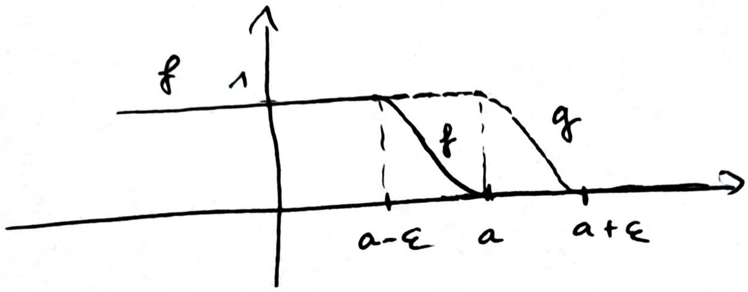
f' est une parabole sur $[a-\varepsilon, a]$, négative donc atteint son minimum en $\dfrac{a-\varepsilon+a}{2} = a - \dfrac{\varepsilon}{2}$

8

$f'(a-\frac{\varepsilon}{2}) = \frac{-3}{2\varepsilon} \Rightarrow \|f'\|_\infty = \frac{3}{2\varepsilon}$

on considère de même la fonction g C^1 égale à 1 sur $]-\infty, a]$

0 sur $[a+\varepsilon, +\infty[$ et polynômiale de degré 3 sur $[a, a+\varepsilon]$



si $x \in]-\infty, a-\varepsilon]$ $f(x) = 1, g(x) = 1$ $I_a(x) = 1$
donc $f(x) \leq I_a(x) \leq g(x)$

si $x \in [a-\varepsilon, a]$ $f(x) \leq 1$, $I_a(x) = 1$, $g(x) = 1$
donc $f(x) \leq I_a(x) \leq g(x)$

si $x \in [a, a+\varepsilon]$ $f(x) = 0$ $I_a(x) = 0$ $g(x) \geq 0$
donc $f(x) \leq I_a(x) \leq g(x)$

si $x \in [a+\varepsilon, +\infty[$ $f(x) = 0$, $I_a(x) = 0$, $g(x) = 0$
donc $f(x) \leq I_a(x) \leq g(x)$

donc $f \leq I_a \leq g$ sur $\mathbb{R}$

donc $f(Z_n) \leq I_a(Z_n) \leq g(Z_n)$

donc $E(f(Z_n)) \leq E(I_a(Z_n)) \leq E(g(Z_n))$

(les espérances existent car les VA sont bornées.)

. $I_a(Z_n)$ prend 2 valeurs 0 ou 1

$I_a(Z_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } Z_n \leq a \\ 0 & \text{si } Z_n > a \end{cases}$

$E(I_a(Z_n)) = 1 \times P(Z_n \leq a) + 0 \times P(Z_n > a) = P(Z_n \leq a)$

donc $\underline{E(f(Z_n)) \leq P(Z_n \leq a) \leq E(g(Z_n))}$

par croissance de l'espérance mathématique, mais aussi que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)G(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{-\infty}^{a} G(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} g(x)G(x)\,\mathrm{d}x$$

par croissance de l'intégrale (la fonction G étant positive et intégrable sur $\mathbb{R}$).
On déduit de ces deux encadrements que

$$\mathbf{E}(f(Z_n)) - \int_{\mathbb{R}} gG \leq \mathbf{P}(Z_n \leq a) - \int_{-\infty}^{a} G(x)\,\mathrm{d}x \leq \mathbf{E}(g(Z_n)) - \int_{\mathbb{R}} fG$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{E}(f(Z_n)) - \int_{\mathbb{R}} fG - \int_{\mathbb{R}} (g-f)G \leq \mathbf{P}(Z_n \leq a) - \int_{-\infty}^{a} G(x)\,\mathrm{d}x \leq \mathbf{E}(g(Z_n)) - \int_{\mathbb{R}} gG + \int_{\mathbb{R}} (g-f)G.$$

La différence $g-f$ est nulle en dehors de $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ et majorée par 1 sur ce segment. Par conséquent,

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} (g(x) - f(x))G(x)\,\mathrm{d}x \leq (2\varepsilon) \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\varepsilon.$$

D'après III.6 les deux quantités

$$\left|\mathbf{E}(f(Z_n)) - \int_{\mathbb{R}} fG\right| \quad \text{et} \quad \left|\mathbf{E}(g(Z_n)) - \int_{\mathbb{R}} gG\right|$$

sont majorées par $\displaystyle\frac{C_2(2+M)}{2\sqrt{n}}\left(1+\frac{3}{2\varepsilon}\right)$

donc pour tout $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$:

$$\left|\mathbf{P}(Z_n \leq a) - \int_{-\infty}^{a} G(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{C_2(2+M)}{2\sqrt{n}}\left(1+\frac{3}{2\varepsilon}\right) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\varepsilon.$$

En choisissant $\varepsilon = n^{-1/4}$, on en déduit que

$$\forall a \in \mathbb{R},\ \mathbf{P}(Z_n \leq a) = \int_{-\infty}^{a} G(x)\,\mathrm{d}x + O(n^{-1/4}).$$

IV

1) a) c'est la convexité de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$

Si on pose $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = e^x$

f est 2 fois dérivable et $f''(x) = e^x \geq 0$ $\forall x$

donc f est convexe sur $\mathbb{R}$

donc $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$ $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$

donc $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ $e^{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2} \leq \lambda e^{x_1} + (1-\lambda)e^{x_2}$.

on pose $h(x) = e^{tx}$ (avec $t \in \mathbb{R}_+$ fixé)

pour $x \in [-M, M]$, $x = \lambda M + (1-\lambda)(-M)$ $\lambda \in [0,1]$

plus précisément : $x = 2\lambda M - M \iff 2\lambda M = M + x$

$\iff \lambda = \frac{M+x}{2M}$ $\quad 1-\lambda = 1 - \frac{1}{2} - \frac{x}{2M}$

$$x = \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2M}\right) M + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2M}\right)(-M) \qquad \lambda = \frac{1}{2} + \frac{x}{2M} \qquad 1-\lambda = \frac{1}{2} - \frac{x}{2M}$$

$$h(x) = e^{tx} = e^{t\left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2M}\right)M + t\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2M}\right)(-M)}$$

$$\underline{h(x) \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{2M}\right) e^{tM} + \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2M}\right) e^{-tM}} \qquad \forall x \in [-M, M]$$

$X_i \in [-M, M]$ donc $h(X_i) \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{X_i}{2M}\right) e^{tM} + \left(\frac{1}{2} - \frac{X_i}{2M}\right) e^{-tM}$

l'espérance est croissante et linéaire :

$$E(h(X_i)) \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{E(X_i)}{2M}\right) e^{tM} + \left(\frac{1}{2} - \frac{E(X_i)}{2M}\right) e^{-tM}$$

$E(X_i) = 0$ donc $E(h(X_i)) \leq \frac{1}{2} e^{tM} + \underline{\frac{1}{2} e^{-tM}}$

d'où $\underline{E\left(e^{tX_i}\right) \leq \frac{1}{2} e^{tM} + \frac{1}{2} e^{-tM}}$

b) $t \geq 0$ $M \geq 0$

$$\frac{1}{2}\left(e^{tM} + e^{-tM}\right) = \operatorname{ch}(tM) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n} M^{2n}}{(2n)!}$$ (DSE de ch $R = +\infty$)

$$e^{\frac{1}{2}t^2M^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n} M^{2n}}{2^n n!}$$ (DSE de exp, $R = +\infty$)

$2^n n! = 2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2)(2n) \leq (2n)!$

donc $\frac{1}{(2n)!} \leq \frac{1}{2^n n!}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n} M^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n} M^{2n}}{2^n n!}$

donc $\underline{\frac{1}{2}\left(e^{tM} + e^{-tM}\right) \leq e^{\frac{1}{2}t^2M^2}}$

M

2) Comme exp est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \delta\right] = \left[\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} tX_i\right) \geq e^{t\delta}\right]$$

et comme

$$\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} tX_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{tX_i}{n}\right)$$

est une variable aléatoire positive d'espérance finie (elle est presque sûrement bornée), on déduit de l'inégalité de Markov que

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \delta\right) \leq e^{-t\delta}\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} tX_i\right)\right].$$

Comme les X_i sont des variables aléatoires presque sûrement bornées, indépendantes et de même loi, les variables aléatoires $\exp(tX_i/n)$ sont indépendantes, d'espérance finie et de même loi, donc

$$\mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{tX_i}{n}\right)\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{tX_i}{n}\right)\right] = \left(\mathbf{E}\left[\exp\left(\frac{tX_1}{n}\right)\right]\right)^n \leq \exp\left(\frac{t^2M^2}{2n}\right)$$

d'après **IV.1.** (avec $t \leftarrow t/n$).

On a ainsi démontré que

$$\forall\, t \geq 0, \qquad \mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \delta\right) \leq e^{-t\delta}\exp\left(\frac{t^2M^2}{2n}\right)$$

et en passant à l'inf dans le second membre (qui atteint son minimum pour $t = \delta n/M^2$), on obtient

$$\mathbf{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq \delta\right) \leq \exp\left(-\frac{\delta^2 n}{2M^2}\right).$$

3) On a établi au **III.7** qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*,\ \forall\, a \in \mathbf{R}, \qquad \left|\mathbf{P}(Z_n \leq a) - \int_{-\infty}^{a} G(x)x\right| \leq Kn^{-1/4}.$$

Cet encadrement donne la limite (pour la convergence uniforme sur $\mathbf{R}$) de la fonction de répartition de Z_n : il s'agit d'un résultat de *convergence en loi* (une des nombreuses moutures du théorème de Moivre-Laplace).

On a établi au **IV.2** que

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^*,\ \forall\, \delta > 0, \qquad \mathbf{P}\left(\frac{Z_n}{\sqrt{n}} \geq \delta\right) \leq e^{-n\delta^2/2M^2},$$

ce qui ne donne qu'une estimation de la queue de la distribution de Z_n : il s'agit d'un résultat de *grandes déviations*.

Comme a, δ et n peuvent être arbitrairement choisis, on peut appliquer le résultat de **III.6** avec $a = \delta\sqrt{n}$:

$$\left|\mathbf{P}\left(\frac{Z_n}{\sqrt{n}} > \delta\right) - \int_{\delta\sqrt{n}}^{+\infty} G(x)x\right| \leq Kn^{-1/4}$$

et comme (résultat classique)

$$\int_{y}^{+\infty} G(x)\,\mathrm{d}x \underset{y\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi}y}e^{-y^2/2},$$

on obtient seulement $\mathbf{P}(Z_n/\sqrt{n} > \delta) = O(n^{-1/4})$, ce qui est beaucoup moins précis que la majoration obtenue au **IV.2**.

De même, on peut appliquer le résultat du **IV.2** avec $\delta = a/\sqrt{n}$. On obtient seulement

$$\forall\, n \geq 1, \qquad \mathbf{P}(Z_n \geq a) \leq e^{-a^2/2M^2}$$

ce qui ne permet pas de connaître la limite en loi de Z_n (ni même de prouver la convergence en loi), alors qu'on a démontré au **III.7** que

$$\mathbf{P}(Z_n \geq a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^{+\infty} e^{-x^2/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}} \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-a^2/2}}{\sqrt{2\pi}a}.$$

Bref : les deux résultats établis n'ont pas grand chose de comparable. Le premier (III.6) est précis sur la limite et imprécis sur la vitesse de convergence ; le second (IV.2) est imprécis sur la limite mais très précis sur la vitesse de convergence. À chaque problématique ses techniques !

4)a. Il faut évidemment comprendre que f est prolongée par continuité en 0. Nous avons:

$$|f(X)| = \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{(n+2)!}\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M^n}{(n+2)!} = f(M).$$

4)b. Soit $t \in \mathbb{R}_+$. D'après l'astuce taupinale et la majoration du **IV.4.a.**,

$$\begin{aligned} \forall\, |x| \leq M, \quad e^{tx} &= 1 + tx + t^2x^2 \frac{e^{tx} - 1 - tx}{t^2x^2} \\ &\leq 1 + tx + t^2x^2 f(tM). \end{aligned}$$

On en déduit que $e^{tX_i} \leq 1 + tX_i + t^2X_i^2 f(tM)$ presque sûrement. Donc, par linéarité et positivité de l'espérance,

$$\mathbf{E}(e^{tX_i}) \leq 1 + t\mathbf{E}(X_i) + t^2\mathbf{E}(X_i^2) f(tM) = 1 + t^2 f(tM)$$

puisque X_i est centrée et réduite et finalement

$$\mathbf{E}(e^{tX_i}) \leq \exp(t^2 f(tM))$$

d'après l'inégalité de convexité rappelée par l'énoncé.

On a d'autre part, pour tout $t \geq 0$ et en notant $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$:

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq \delta\right) = P\left(e^{tS_n} \geq e^{nt\delta}\right) \leq e^{-nt\delta} E\left(e^{tS_n}\right) = e^{-nt\delta} \prod_{i=1}^n E(e^{tX_i})$$

en utilisant l'inégalité de Markov et l'indépendance des X_i. L'inégalité précédente donne:

$$P\left(\frac{S_n}{n} \geq \delta\right) \leq e^{-n/M^2 (t\delta - e^{tM} + 1 - tM)}.$$

En choisissant $t = \dfrac{1}{M} \ln(M\delta + 1)$, valeur en laquelle la fonction $t \longmapsto M^2 t\delta - e^{tM} + 1 - tM$ atteint son maximum, nous obtenons exactement l'inégalité demandée.