PC* 2024-2025

Programme de colle N°15 : semaine du 20 janvier au 25 janvier

*Séries entières

-Définition d'une série entière , lemme d'Abel , rayon de convergence .

-Comparaison des rayons de convergence des deux séries entières .Rayon de convergence de la somme , du produit de Cauchy de deux séries entières .

-Convergence normale des séries de variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence , continuité de la somme .

-Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence

-Dérivation et intégration terme à terme d'une série réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence . Primitivation d'une SE . Une série entière est de classe C^∞ sur $]-R,R[$ .Dérivée k-ième

- Développement en série entière : condition sur le reste de Taylor .Série de Taylor .Unicité des coefficients du DSE , application au DSE d'une fonction paire ou impaire .

-Développement en série entière des fonctions usuelles : formules de développement de e^x ; $\cos x$; $\sin x$; chx ; shx ; $(1+x)^\alpha$; $\frac{1}{1+x}$; $\frac{1}{1-x}$; e^z $(z \in \mathbb{C})$; $\ln(1+x)$, $A\text{rctan}\, x$; $Arc\sin x$ (le DES d' $Arc\sin x$ n'est pas à connaître par cœur)

-Pratique du développement en série entière .Calcul de sommes de séries entières .

*Questions de cours

1) Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence

2) Formule de développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ (à montrer)

3) Déterminer le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{4n^2-1}$ et calculer f sur $]-R,R[$. En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$

4) Rayon de convergence de $\sum \left(\ln \frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right) x^n$ et convergence en R et –R

5) On suppose $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$ et que la série $\sum u_n$ diverge .Montrer que les séries entières $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} u_k \right) x^n$ ont le même rayon de convergence R et que $R \le 1$

A suivre : Intégrales à paramètre