PC* 2024-2025

Programme de colle N°16 : semaine du 27 janvier au 31 janvier

*Séries entières*

-Définition d'une série entière , lemme d'Abel , rayon de convergence

-Comparaison des rayons de convergence des deux séries entières .Rayon de convergence de la somme , du produit de Cauchy de deux séries entières .

-Convergence normale des séries de variable réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence , continuité de la somme .

-Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence

-Dérivation et intégration terme à terme d'une série réelle sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence .

Primitivation d'une SE . Une série entière est de classe $C^\infty$ sur $]-R,R[$ .Dérivée k-ième

- Développement en série entière : condition sur le reste de Taylor .Série de Taylor .Unicité des coefficients du DSE , application au DSE d'une fonction paire ou impaire .

-Développement en série entière des fonctions usuelles : $e^x$ ; $\cos x$ ; $\sin x$ ; $chx$ ; $shx$ ; $(1+x)^\alpha$ ; $\frac{1}{1+x}$; $\frac{1}{1-x}$;

$e^z$ $(z \in \mathbb{C})$ ; $\ln(1+x)$ , $A\mathrm{rctan}\, x$ ; $Arc\sin x$ ( le DES d' $Arc\sin x$ n'est pas à connaître par coeur )

-Pratique du développement en série entière .Calcul de sommes de séries entières .

* Intégrales dépendant d'un paramètre

-Th de convergence dominée à paramètre continu

-Th de continuité sous le signe intégral

-Th de dérivation sous le signe intégral , extension aux fonctions de classe $C^n$

*Questions de cours

1) Les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence

2) Formule de développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ( à montrer )

3) Déterminer le rayon de convergence de $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+1}}{4n^2-1}$ et calculer $f$ sur $]-R,R[$ . En déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$

4) Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2+t^2} dt$ . Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

5) Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2+t^2} dt$ . Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

6) Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2+t^2} dt$ . Montrer que $f(x) \sim \frac{1}{x^2}$ $(x \to +\infty)$

A suivre : Variables aléatoires