PC* 2024-2025

Programme de colle N°17 : semaine du 03 février au 08 février

* Intégrales dépendant d'un paramètre
-Th de convergence dominée à paramètre continu :
-Th de continuité sous le signe intégral
-Th de dérivation sous le signe intégral , extension aux fonctions de classe C^n

*Variables aléatoires discrètes
- Loi d'une variable aléatoire.
-Lois usuelles : Uniforme, Bernoulli, Binomiale, Géométrique, Poisson
-Couple de variables aléatoires , loi conjointe , lois marginales ,VA indépendantes, loi de la somme et du produit de deux VA à valeurs réelles
-n-uplet de VA, suite de VA, VA indépendantes 2 à 2 . VA mutuellement indépendantes, lemme des coalitions.
-Espérance, propriétés de l'espérance : linéarité , positivité , croissance. Formule de transfert
Espérance d'une loi Binômiale et d'une loi de Poisson.

Pour X à valeurs dans $\mathbb{N}$, X est d'espérance finie ssi $\sum P(X \geq n)$ converge et on a alors $E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.

Application au calcul de l'espérance d'une loi géométrique.
-Espérance d'un produit de VA indépendantes .
-Variance, propriétés, écart type
-Covariance. Variance d'une somme de VA, cas particulier d'une somme de VA indépendantes 2 à 2 . Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité.
-Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev .Loi faible des grands nombres

Remarque : Pas encore la fonction génératrice. On n'a pas encore calculé les variances des lois usuelles, ce sera fait plus tard avec la fonction génératrice.

*Questions de cours

1) Soit $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

2) Soit $f(x)=\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2+t^2}\, dt$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

3) Soit $f(x)=\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x^2+t^2}\, dt$. Montrer que $f(x) \sim \frac{1}{x^2} \quad (x \to +\infty)$

4) Loi de la somme de deux VA indépendantes suivant chacune une loi de Poisson (sans les fonctions génératrices)

5) Si X est d'espérance finie et à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors $E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$

6) Calcul de l'espérance d'une loi géométrique à l'aide de la formule $E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$

A suivre : Variables aléatoires et fonction génératrice