

Corrigé en 15 feuille 17

$$A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \quad A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

$B = (E_1, \dots, E_n)$ base canonique de $M_{n,1}(\mathbb{R})$

$$\varphi: (M_{n,1}(\mathbb{R}))^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{est un produit scalaire} \\ (X, Y) \mapsto X^T A Y \quad (\text{à faire}).$$

$$\varphi(X, Y) = X^T A Y$$

on pose $(X, Y) = X^T Y$ (produit scalaire usuel)

$B' = (E'_1, \dots, E'_n)$ orthogonalisée de Schmidt de B
par le produit scalaire φ .

$$P = P_{B', B} = \begin{pmatrix} E_1 & \dots & E_n \\ & p_{ij} & \\ & & E'_n \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} P \text{ est triangulaire sup} \\ \text{car } \text{Vect}(E_1, \dots, E_k) = \text{Vect}(E'_1, \dots, E'_k) \end{array}$$

$$P = (p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \quad P^T P = (c_{ij}) \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^n p_{ki} p_{kj}$$

on peut remarquer que $\varphi(E_i, E_j) = E_i^T A E_j = a_{ij}$

$$\text{d'après l'écriture de } P: \quad E_j = \sum_{k=1}^n p_{kj} E'_k \quad E_i = \sum_{l=1}^n p_{li} E'_l$$

$$\varphi(E_i, E_j) = \varphi\left(\sum_{k=1}^n p_{kj} E'_k, \sum_{l=1}^n p_{li} E'_l\right) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n p_{kj} p_{li} \varphi(E'_k, E'_l)$$

$$\varphi(E_i, E_j) = \sum_{k=1}^n p_{ki} p_{kj} = c_{ij}$$

$$\text{donc } a_{ij} = c_{ij} \text{ donc } \underline{A = P^T P}$$

car B' est orthogonale
par φ

$$\det A = (\det P)^2 = \left(\prod_{i=1}^n p_{ii}\right)^2 = \prod_{i=1}^n p_{ii}^2$$

$(E'_1, \dots, E'_n)$ est orthogonale par φ donc $p_{ij} = \varphi(E_i, E'_j)$

$$p_{ii} = \varphi(E_i, E'_i) \text{ donc } p_{ii}^2 \leq \varphi(E_i, E_i) \varphi(E'_i, E'_i) \quad \text{d'après Cauchy-Schwarz}$$

$$p_{ii}^2 \leq a_{ii} \quad \text{donc } \underline{\det A = \prod_{i=1}^n p_{ii}^2 \leq \prod_{i=1}^n a_{ii}}$$