analyse 2024 ex 1

$E = \{ f \in C^1([0,1], \mathbb{R}),\ f(0) = 0 \}$

$N_1(f) = \|f'\|_\infty$, $N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$, $N_3(f) = \|f+f'\|_\infty$.

1) mq N_3 est une norme sur E.

2) $f \in E$ mq $\|f\|_\infty \leq \|f+f'\|_\infty$

3) $N_2 \sim N_3$

4) $N_1 \not\sim N_3$

---

1) OK $f+f'=0 \to f(x) = \lambda e^{-x}$ et $f(0)=0$ donc $f=0$

2) $g = f+f'$

$f_H(x) = \lambda e^{-x}$

variation de la cste : $f_p(x) = \lambda(x) e^{-x}$

$f_p' = \lambda' e^{-x} - \lambda e^{-x}$

$f_p + f_p' = \lambda' e^{-x} = g(x)$

$\lambda'(x) = g(x) e^{x}$

$\lambda(x) = \int_0^x g(t) e^{t} dt \qquad f_p(x) = e^{-x} \int_0^x g(t) e^{t} dt$

$f(x) = \lambda e^{-x} + e^{-x} \int_0^x g(t) e^{t} dt$

$f(0) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ donc $\underline{f(x) = e^{-x} \int_0^x g(t) e^{t} dt}$

$\forall x \in [0,1] \qquad |f(x)| \leq e^{-x} \|g\|_\infty \int_0^x e^{t} dt$

$|f(x)| \leq e^{-x} \|g\|_\infty [e^{t}]_0^x = e^{-x} \|g\|_\infty (e^{x}-1) \leq \|g\|_\infty$

$\Rightarrow \|f\|_\infty \leq \|g\|_\infty$

donc $\underline{\|f\|_\infty \leq \|f+f'\|_\infty}$

3) $\|f\|_\infty \leq N_3(f)$

il est clair que $N_3(f) \leq N_2(f)$

$$f' = g - f$$

$$\|f'\|_\infty \leq \|g\|_\infty + \|f\|_\infty = N_3(f) + \|f\|_\infty \leq 2 N_3(f)$$

et $\|f\|_\infty \leq N_3(f)$

donc $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \leq 3 N_3(f)$

$$N_2(f) \leq 3 N_3(f)$$

donc $N_2 \sim N_3$

4) prenons $f_n(t) = 1 - e^{-t/n}$ $\quad t \in [0,1]$ $\quad \|f_n\|_\infty = 1$

$f_n(0) = 0$ $\quad f_n \in E$

$f_n'(t) = \frac{1}{n} e^{-t/n}$ $\quad \|f_n'\|_\infty = \frac{1}{n}$

$N_2(f_n) = 1 + \frac{1}{n}$ $\quad N_1(f_n) = \frac{1}{n}$

$$\frac{N_2(f_n)}{N_1(f_n)} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = n+1 \to +\infty \quad \text{non borné}$$

donc $N_1 \not\sim N_2$.

Corrigé ex 3 analyse

nature des séries 1) $\sum \sin\left(\frac{\pi n!}{\sum_{k=0}^{n} k!}\right)$ 2) $\sum \sin(\pi e n!)$

---

1) $u_n = \frac{\pi n!}{\sum_{k=0}^{n} k!} = \frac{\pi}{\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!}} = \frac{\pi}{1+\alpha_n}$

avec $\alpha_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{n!} = \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!}$ pour $n \geq 2$

$\alpha_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)\cdots(k+1)}$

$n \geq 3$ pour $k \in [\![0, n-2]\!]$ $\frac{1}{n(n-1)\cdots(k+1)} \leq \frac{1}{n(n-1)}$

donc $\sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)\cdots(k+1)} \leq \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to +\infty)$

donc $\alpha_n \to 0 \ (n \to +\infty)$

$u_n = \pi(1 - \alpha_n + o(\alpha_n))$

$\sin u_n = \sin(\pi - \alpha_n \pi + o(\alpha_n)) = \sin \alpha_n \pi + o(\alpha_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha_n \pi$

équivalent de α_n ?

$\alpha_n - \frac{1}{n} - \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{n(n-1)\cdots(k+1)}$ $n \geq 4$

$k \in [\![0, n-3]\!]$ $\frac{1}{n(n-1)\cdots(k+1)} \leq \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$

$0 \leq \sum_{k=0}^{n-3} \frac{1}{n(n-1)\cdots(k+1)} \leq \frac{1}{n(n-1)} = o\left(\frac{1}{n}\right)$

donc $\alpha_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ $\alpha_n \sim \frac{1}{n}$

donc $\sin u_n \sim \frac{\pi}{n}$ donc $\sum \sin u_n$ diverge.

de signe constant

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dérivable $f \neq 0$

on suppose $\exists M > 0$ tq

ex 7

$\forall x \in [0,1] \quad |f'(x)| \leq M |f(x)|$

mq f ne s'annule en aucun point de $[0,1]$

---

si $f(x_0) = 0$ alors $f'(x_0) = 0$

f est bornée sur $[0,1]$ donc f' aussi $\quad |f(x)| \leq m$

donc f est lipschitzienne.

$$|f'(x)| \leq Mm = K$$

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$$

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_0)| \leq K|x - x_0| \qquad (f(x_0) = 0)$$

$$|f'(x)| \leq MK|x - x_0| \qquad \forall x \in [0,1]$$

$x \geq x_0$
$$\left|\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt\right| \leq \int_{x_0}^{x} |f'(t)|\,dt \leq MK \int_{x_0}^{x} |t - x_0|\,dt$$

$$\leq MK \left[\frac{(t-x_0)^2}{2}\right]_{x_0}^{x}$$

$$|f(x)| \leq MK\frac{(x-x_0)^2}{2}$$

$$|f'(x)| \leq M^2K\frac{(x-x_0)^2}{2}$$

$$\forall n \quad |f'(x)| \leq M^nK\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

$$|f(x)| \leq M^nK\frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

$$\sum M^n K \frac{(x-x_0)^n}{n!} \text{ conv } \left(\text{vers } K e^{M(x-x_0)}\right)$$

mais $\sum_n |f(x)|$ div $\leadsto$ contrad.

Mines 2024

ex 8

1) trouver toutes les fonctions $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$
tq $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$? $f(x+y) = f(x) + f(y)$

2) idem avec $f(x+y) = f(x) f(y)$

---

1) $f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

par récurrence $f(nx) = n f(x)$

$f(x-x) = f(x) + f(-x) = 0$
$\Rightarrow f$ impaire.

si $n \in \mathbb{Z}^-$ $f(nx) = n f(x)$.

$x = \frac{1}{p}$ $\quad f\left(\frac{n}{p}\right) = n f\left(\frac{1}{p}\right)$

$p f\left(\frac{n}{p}\right) = f(n) = n f(1)$

$f\left(\frac{n}{p}\right) = \frac{n}{p} f(1)$

si $x \in \mathbb{R}$, x est la lim d'une suite de rationnels

$r_n \to x$

$f(r_n) = r_n f(1)$

$\Rightarrow f(x) = x f(1)$

f est linéaire $f(x) = \lambda x$

réciproque marche.

2) $f(x+y) = f(x) f(y)$ $\qquad f(0) = (f(0))^2$

$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geqslant 0$

si $f(0) = 0$ $\quad f(x) = f(x+0) = f(x) f(0) = 0$
$f = 0$.

si $f \neq 0$ $f(0) \neq 0$ $f(0) = 1 \geq 0$

Supposons $\exists x_0$ tq $f(x_0) = 0$

alors $f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0) f(x_0) = 0$

$\Rightarrow f = 0$.

contrad

donc f ne s'annule pas.

donc $\forall x$ $f(x) > 0$

on pose $g(x) = \ln f(x)$

alors $\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y)$

$g(x+y) = g(x) + g(y)$

$\Rightarrow g(x) = \alpha x$ (11)

$\alpha x = \ln f(x) \Rightarrow \underline{f(x) = e^{\alpha x}}$.

analyse

$\boxed{\text{ex } 10}$. $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^t}{\operatorname{Arcsin} t} \, dt$

1) Arcsin est défini sur $[-1,1]$ et $\operatorname{Arcsin} t = 0 \Leftrightarrow t = 0$

on doit avoir $[x, x^2] \subset [-1,1]$ (ou $[x^2, x]$)

et $0 \notin [x, x^2]$

si $x > 1$ alors $[-1,1] \not\subset [x, x^2]$

si $x \in]0,1]$, $x^2 \in]0,1]$ donc $[x^2, x] \subset [-1,1]$

si $x = 0$ $t = 0$ pas possible

si $x < 0$ alors $x^2 > 0$ donc $0 \in [x, x^2]$

Conclusion : f est définie sur $]0,1]$

posons $g(t) = \frac{e^t}{\operatorname{Arcsin} t}$ $t \in]0,1]$

g est continue sur $]0,1]$ donc admet des primitives

Soit G une primitive de g sur $]0,1]$

$f(x) = G(x^2) - G(x)$ G dérivable donc f dérivable sur $]0,1]$

$f'(x) = 2x G'(x^2) - G'(x)$

$f'(x) = \frac{2x e^{x^2}}{\operatorname{Arcsin} x^2} - \frac{e^x}{\operatorname{Arcsin} x}$ $\forall x \in]0,1]$

2) Posons $h(x) = f(x) - \int_x^{x^2} \frac{dt}{t} = \int_x^{x^2} \left(\frac{e^t}{\operatorname{Arcsin} t} - \frac{1}{t} \right) dt$

$k(t) = \frac{e^t}{\operatorname{Arcsin} t} - \frac{1}{t} = \frac{t e^t - \operatorname{Arcsin} t}{t \operatorname{Arcsin} t} \underset{t \to 0}{=} \frac{t + t^2 + o(t^2) - t + o(t^2)}{t \operatorname{Arcsin} t}$

$\operatorname{Arcsin} t \underset{0}{\sim} t$ donc $k(t) \sim \frac{t^2}{t^2} = 1$

k est prolongeable par continuité en 0. $h(x) = K(x^2) - K(x)$

avec K primitive de k sur $[0,1]$ K continue en 0

$\Rightarrow h(x) \to 0$ $(x \to 0)$. De plus $\int_x^{x^2} \frac{1}{t} dt = \ln 2$

$f(x) - \ln 2 \to 0$ $(x \to 0)$

donc $f(x) \to \ln 2$ $(x \to 0)$

analyse (12)

1) ch^t de var $u = t^n$ (à justifier)

$$\int_0^1 n\ln(1+t^n)\,dt = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} u^{1/n}\,du$$

$f_n : u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u} u^{1/n}$ $\quad u \in]0,1]$

Th de conv dominée, domination par $u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ qui est intégrable sur $]0,1]$

2) $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du$

DSE $\quad u \in]0,1[\quad \ln(1+u) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n}$

$$\frac{\ln(1+u)}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^n}{n+1}$$

$I = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^n}{n+1}\,du \qquad g_n : u \mapsto (-1)^n \frac{u^n}{n+1}$

g_n est cpm, intégrable sur $[0,1]$

$\sum g_n$ cs vers $u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ qui est cpm

puis $J_n = \int_0^1 |g_n(u)|\,du = \int_0^1 \frac{u^n}{n+1}\,du = \frac{1}{(n+1)^2}$

$\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ conv donc $\sum \int_0^1 |g_n|$ converge

donc d'après le th d'intégration terme à terme

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{u^n}{n+1}\,du = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

$$I = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^2}$$

$$I = -\sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -2\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$I = -2\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} + \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

3) f continue sur $[0,1]$ $\rightarrow$ f est bornée sur $[0,1]$

$\exists M>0 \quad \forall x \in [0,1] \quad |f(x)| \leq M$

$$K_n = \int_0^1 n f(t) \ln(1+t^n)\, dt$$

ch^t de var $\quad u = t^n$

$$K_n = \int_0^1 n f(u^{1/n}) \ln(1+u) \frac{1}{n} u^{1/n-1}\, du = \int_0^1 f(u^{1/n}) \frac{\ln(1+u)}{u} u^{1/n}\, du$$

th de conv dominée

$\forall u \in]0,1] \quad \left| f(u^{1/n}) \frac{\ln(1+u)}{u} u^{1/n} \right| \leq M \frac{\ln(1+u)}{u}$ intégrable.

donc $\quad n \to +\infty \quad u^{1/n} \to 1 \qquad f(u^{1/n}) \to f(1)$ par continuité de f

donc $\quad K_n \to f(1) \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\, du \quad (n \to +\infty)$

$$K_n \to f(1)\frac{\pi^2}{12} \quad (n \to +\infty)$$

corrigé $\boxed{\text{ex } 13}$ analyse

$n \geq 2 \quad I_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+\dots+t^n}$

1) $n \geq 2 \quad \frac{1}{1+t+\dots+t^n} \sim \frac{1}{t^n}$ intégrable sur $[1,+\infty[$

2) $I_{n-1} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+t+\dots+t^{n-1}}$

ch^t de var $u = \frac{1}{t}$ $\quad \varphi : \begin{array}{l}]0,1] \to [1,+\infty[\\ u \mapsto \frac{1}{u} \end{array}$ est C^1, bijective strict $\downarrow$

$t = \frac{1}{u} \quad dt = -\frac{1}{u^2} du$

$I_{n-1} = \int_1^0 \frac{-\frac{1}{u^2} du}{1+\frac{1}{u}+\dots+\frac{1}{u^{n-1}}} = \int_0^1 \frac{1}{u^2} \frac{u^{n-1}}{u^{n-1}+\dots+u+1} du$

$= \int_0^1 \frac{1-u}{1-u^n} u^{n-3} du$

ch^t de var $s = u^n$ $\quad \varphi : \begin{array}{l}]0,1[\to]0,1[\\ s \mapsto s^{1/n} \end{array}$

$u = s^{1/n}$

est C^1 bijective, strict $\nearrow$.

$I_{n-1} = \int_0^1 \frac{1-s^{1/n}}{1-s} s^{\frac{n-3}{n}} \frac{1}{n} s^{\frac{1}{n}-1} ds = \frac{1}{n^2} \int_0^1 n \frac{1-s^{1/n}}{1-s} s^{-2/n} ds$

3) $n^2 I_{n-1} = \int_0^1 n \frac{1-s^{1/n}}{1-s} s^{-2/n} ds$.

posons $f_n : s \mapsto n \frac{1-s^{1/n}}{1-s} s^{-2/n} \quad s \in]0,1[$

f_n est cpm sur $]0,1[$

si $n \to +\infty \quad 1-s^{1/n} = 1-e^{\frac{1}{n}\ln s} \sim -\frac{1}{n}\ln s$ et $s^{-2/n} \to 1$

$f_n(s) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{\ln s}{1-s}$

(f_n) CS vers $s \mapsto -\frac{\ln s}{1-s}$ sur $]0,1[$.

il faut dominer $|f_n(s)| = n \frac{1-s^{1/n}}{1-s} s^{-2/n}$

corrigé $\boxed{\text{ex 15}}$ analyse

$f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $t \mapsto f'^2(t) + t^2 f^2(t)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$

1) $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad 0 \leq f'^2(t) \leq f'^2(t) + t^2 f^2(t)$

par comparaison f'^2 est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

idem $\quad t^2 f^2(t) \leq f'^2(t) + t^2 f^2(t)$

donc $t \mapsto t^2 f^2(t)$ est intégrable

ces fonctions sont continues sur $\mathbb{R}_+$, en particulier sur $[0,1]$

pour $t \geq 1 \quad 0 \leq t f^2(t) \leq t^2 f^2(t)$

donc $t \mapsto t f^2(t)$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+$

idem pour $t \geq 1 \quad 0 \leq f^2(t) \leq t f^2(t)$

donc f^2 est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc sur $\mathbb{R}_+$

2) posons $I = \int_0^{+\infty} f^2(t)dt$

IPP : $\quad u = f^2(t) \qquad u' = 2 f'(t) f(t) \qquad u, v$ sont C^1 sur $\mathbb{R}_+$

$v' = 1 \qquad v = t$

il faut montrer que $t f^2(t) \to 0 \ (t \to \infty)$

IPP sur $\int_0^x f^2(t)dt$

$$I_x = \int_0^x f^2(t)dt = \left[t f^2(t)\right]_0^x - \int_0^x 2t f'(t) f(t) dt$$

$$I_x = x f^2(x) - 2 \int_0^x t f'(t) f(t) dt$$

on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

donc $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad |t f'(t) f(t)| \leq \frac{1}{2}\big(\underbrace{t^2 f^2(t) + f'^2(t)}_{\text{intégrable}}\big)$

par comparaison $t \mapsto t f'(t) f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

donc $x \mapsto \int_0^x t f'(t) f(t) dt$ admet une limite finie en $+\infty$

et I_x aussi donc $x \mapsto x f^2(x)$ admet une limite finie en $+\infty$.

posons $\ell = \lim_{t \to +\infty} t f^2(t) \qquad \ell \geq 0$

Supposons $\ell \neq 0$ alors $f^2(t) \sim \frac{\ell}{t}$ non intégrable en $+\infty$

or f^2 est intégrable. contradiction

donc $t f^2(t) \to 0$ $(t \to +\infty)$

donc $\int_0^{+\infty} f^2(t)dt = -2 \int_0^{+\infty} t f'(t) f(t) dt$

appliquons Cauchy-Schwarz à $\int_0^x t f'(t) f(t) dt$

$$\left(\int_0^x t f'(t) f(t) dt\right)^2 \leq \int_0^x f'^2(t)dt \int_0^x t^2 f^2(t)dt$$

toutes ces intégrales convergent lorsque $x \to \infty$

par passage à la limite

$$\left(\int_0^{+\infty} t f'(t) f(t) dt\right)^2 \leq \int_0^{+\infty} f'^2(t)dt \int_0^{+\infty} t^2 f^2(t)dt$$

$$\frac{1}{4}\left(\int_0^{+\infty} f^2(t)dt\right)^2 \leq \int_0^{+\infty} f'^2(t)dt \int_0^{+\infty} t^2 f^2(t)dt$$

donc

$$\int_0^{+\infty} f^2(t)dt \leq 2\left(\int_0^{+\infty} f'^2(t)dt\right)^{1/2}\left(\int_0^{+\infty} t^2 f^2(t)dt\right)^{1/2}$$

analyse

en 20

$$u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n \, dt$$

on considère $\sum u_n x^n$ R son rayon

1) $\forall t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ $\tan t \leq 1$ donc $u_n \leq \frac{\pi}{4}$

donc $R \geq 1$ (car le rayon de conv de $\sum \frac{\pi}{4} x^n$ est 1)

$((-1)^n u_n)$ est alterné

$\forall t \in [0, \frac{\pi}{4}]$ $0 \leq \tan t \leq 1$ donc $(\tan t)^{n+1} \leq (\tan t)^n$

donc $u_{n+1} \leq u_n$ donc $(u_n) \downarrow$.

$u_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ par en en appliquant le th de conv dominée (domination par $t \mapsto 1$)

donc d'après le CSSA $\sum (-1)^n u_n$ converge

(confirme que $R \geq 1$)

convergence de $\sum u_n$?

on peut remarquer que $\forall n$? $u_n + u_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

en effet

$$u_n + u_{n+2} = \int_0^{\pi/4} ((\tan t)^n + (\tan t)^{n+2}) \, dt$$

$$= \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n (1 + \tan^2 t) \, dt = \left[\frac{(\tan t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}$$

et $(u_n) \downarrow$ donc $u_{n+2} \leq u_n$

$u_{n+2} + u_n \leq 2 u_n \to \frac{1}{n+1} \leq 2 u_n$

$u_n \geq \frac{1}{2(n+1)}$

donc $\sum u_n$ diverge

donc $R = 1$

et $\sum u_n x^n$ converge pour $x \in [-1, 1[$

2) $\forall n \geq 2$ $u_n + u_{n-2} = \frac{1}{n-1}$

$x \in]-1, 1[$ $u_n x^n + u_{n-2} x^n = \frac{x^n}{n-1}$

$$(*) \quad \sum_{n=2}^{+\infty} u_n x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} u_{n-2} x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n} = -x \ln(1-x)$$

on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$

(*) donne

en 20

$$\sum_{n=2}^{+\infty} u_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^{n+2} = -x \ln(1-x)$$

$$f(x) - u_1 x - u_0 + x^2 f(x) = -x \ln(1-x)$$

$u_0 = \int_0^{\pi/4} dt = \frac{\pi}{4}$ $\quad u_1 = \int_0^{\pi/4} \tan t \, dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{\cos t} dt = \left[-\ln \cos t\right]_0^{\pi/4}$

$= -\ln \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \ln 2$

$$(1+x^2) f(x) = \frac{\pi}{4} + \left(\frac{1}{2} \ln 2\right) x - x \ln(1-x)$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln 2 \frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{1+x^2} \ln(1-x) \quad \forall x \in]-1,1[.$$

3) si $x \to 1$ $\quad f(x) \sim -\frac{1}{2} \ln(1-x)$

si $x \to -1$. on montre que f est continue en -1

pour $x \in [-1,0)$ $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n |x|^n = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

$|x| \leq 1$ donc $(|x|^n)$ est $\downarrow$ et $u_n \downarrow$ donc $(u_n |x|^n)$ est $\downarrow$.

$(-1)^n u_n |x|^n$ est alterné et $u_n |x|^n \to 0$ $(n \to +\infty)$

donc on peut appliquer le CSSA

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k |x|^k$$

$|R_n(x)| \leq |u_{n+1}| |x|^{n+1} \leq |u_{n+1}|$ car $|x| \leq 1$

$\|R_n\|_\infty \leq |u_{n+1}| \to 0$ $(n \to +\infty)$

donc $\sum f_n$ CU sur $[-1,0]$ et $\forall n$ f_n est continue

donc f est continue sur $[-1,0]$

donc si $x \to -1$ $\quad f(x) \to f(-1)$

donc $f(-1) = \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2 \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \ln 2$

$$f(-1) = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \ln 2$$

analyse

en 21

$u_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ R rayon de convergence $f_n : x \mapsto u_n x^n$

1) par récurrence forte $u_n > 0 \quad \forall n$

2) pour $x \in]-R, R[$ $\sum f_n(x)$ converge absolument

donc le produit de Cauchy par elle même

converge absolument (son rayon de conv est $\geq R$)

on pose $a_k = u_k x^k \qquad b_k = u_k x^k$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} x^n = u_{n+1} x^n$$

$$f^2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^n$$

$$x f^2(x) - f(x) + 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n + 1$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n + 1 = -u_0 x^0 + 1 = 0$$

3) $x \in]-R, R[$ fixé, $x \neq 0$

$f(x)$ est solution de l'équation du second degré

(*) $x y^2 - y + 1 = 0$

$\Delta = 1 - 4x$

on suppose que $x \leq \frac{1}{4}$ donc $\Delta \geq 0$

2 solutions $y_1 = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} \qquad y_2 = \dfrac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}$

il faut que la solution admette une limite finie en 0

ce qui exclu y_2

on a alors $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ pour $x \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \setminus \{0\}$

on peut aussi écrire $f(x) = \frac{1-(1-4x)}{2x(1+\sqrt{1-4x})} = \frac{2}{1+\sqrt{1-4x}}$

elle est bien prolongeable par continuité en 0

$f(0)=1$ (compatible avec $u_0=1$)

4) on va écrire un DSE de $f(x)$

pour $x \in]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}[$ $(1-4x)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-4x)^n$

$$(1-4x)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1\times 3\times\dots\times(2n-3)}{2^n\, n!}(-1)^{n-1}(-1)^n 4^n x^n$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{2\times 4\times\dots\times(2n-2)\times 2^n\, n!} 4^n x^n$$

(après arrangement de l'expression)

$$(1-4x)^{1/2} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!\, 2^n\, n!} x^n 4^n$$

$$(1-4x)^{1/2} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!\,(2n)}{2^{2n}(n!)^2} 4^n x^n$$

$$(1-4x)^{1/2} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n-1)(n!)^2} x^n$$

$$f(x) = \frac{1}{2x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n-1)(n!)^2} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2(2n-1)(n!)^2} x^{n-1}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+2)!}{2(2n+1)((n+1)!)^2} x^n$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{(2n+2)!}{2(2n+1)((n+1)!)^2}$$