analyse

$\boxed{\text{ex } 22}$

R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$

R' le rayon de convergence de $\sum \frac{1}{a_n} x^n$

Soit $x \in]0, R[$ alors $\sum a_n x^n$ converge donc $a_n x^n \to 0$ $(n \to +\infty)$

donc $\frac{1}{a_n x^n} \to \infty$ $(n \to +\infty)$

donc $\sum \frac{1}{a_n} (\frac{1}{x})^n$ diverge

donc $\frac{1}{x} \geq R'$

donc $x \leq \frac{1}{R'}$

donc $]0, R[\subset]0, \frac{1}{R'}]$

donc $R \leq \frac{1}{R'}$ donc $\underline{RR' \leq 1}$

cas particulier : $a_n = 2^n$ si n est pair et $a_n = 1$ si n est impair

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1}$

posons $u_n = 2^{2n} x^{2n}$

$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{2^{2n+2} x^{2n+2}}{2^{2n} x^{2n}} \right| = 4x^2$

si $x < \frac{1}{2}$ $4x^2 < 1$ donc $\sum 2^{2n} x^{2n}$ conv

si $x > \frac{1}{2}$ $4x^2 > 1$ donc $\sum 2^{2n} x^{2n}$ div

$\sum 2^{2n} x^{2n}$ a un rayon égal à $\frac{1}{2}$

et $\sum x^{2n+1}$ a un rayon égal à 1 $\Rightarrow R = \frac{1}{2}$ (le + petit des 2)

posons $b_n = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2^n}$ si n est pair, $b_n = 1$ si n impair.

$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n} x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n}} x^{2n}}_{\text{rayon} = 2} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n+1}}_{\text{rayon} = 1} \Rightarrow R' = 1$

$\Rightarrow \underline{RR' = \frac{1}{2}}$

corrigé $\boxed{\text{ex } 25}$ analyse

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1+t^2}\,dt$$

1) définie et continue sur $\mathbb{R}$ (à rédiger)

domination par $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$

2) IPP pour $x>0$

$u = \frac{1}{1+t^2}$ $\quad u' = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$ $\quad u, v$ C^1 sur $\mathbb{R}_+$

$v' = \sin xt$ $\quad v = -\frac{\cos xt}{x}$ $\quad uv$ admet une limite finie en 0 et $+\infty$

$$F(x) = \left[-\frac{\cos(xt)}{x(1+t^2)}\right]_0^{+\infty} - \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} \frac{(\cos xt)\,t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x} J(x) \quad \text{avec} \quad J(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(\cos xt)\,t}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$|J(x)| \leq \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt \quad \text{(intégrale convergente)}$$

donc $x \mapsto J(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $\underline{F(x) \to 0 \ (x \to +\infty)}$ (et même $F(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$)

corrigé $\boxed{\text{ex } 27}$ analyse

$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x \, dt \qquad x \in]-1, +\infty[.$$

relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ - Equivalent de f en $+\infty$

$x \in]-1, +\infty[$ $\qquad f(x+2) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{x+1} \sin t \, dt$

IPP

$u = (\sin t)^{x+1} \qquad u' = (x+1) \cos t (\sin t)^x$

$v' = \sin t \qquad v = -\cos t$

u, v sont C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$

si $t \to 0$ $\quad u(t) v(t) \to 0 \quad$ (car $x+1 > 0$)

$$f(x+2) = \left[(\sin t)^{x+1}(-\cos t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (x+1) \cos^2 t (\sin t)^x \, dt$$

$$f(x+2) = (x+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)(\sin t)^x \, dt = (x+1)\left(f(x) - f(x+2)\right)$$

$$\underline{(x+2) f(x+2) = (x+1) f(x)} \qquad \forall x \in]-1, +\infty[.$$

on applique cette relation en $n \in \mathbb{N}$ et on pose $u_n = f(n)$

$$u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$$

$$u_{2n} = \frac{2n-1}{2n} u_{2n-2}$$

$$u_{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2} u_{2n-4}$$

$\vdots$

$$u_2 = \frac{1}{2} u_0$$

$$u_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3) \times \cdots \times 1}{(2n)(2n-2) \times \cdots \times 2} u_0 = \frac{(2n)!}{((2n)(2n-2) \cdots \times 2)^2} u_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} u_0$$

$u_0 = f(0) = \frac{\pi}{2}$. On va chercher un équivalent de u_{2n} $(n \to +\infty)$

$n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ $\qquad u_{2n} \sim \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{4n\pi} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n} \, 2n\pi \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4n}}$

on montre facilement que $(u_n) \searrow$

$$u_{2n-1} \leq u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_{2n+2}$$

$$\underbrace{\frac{u_{2n}}{u_{2n+2}} = \frac{2n+2}{2n+1}}_{\to 1} \leq \frac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}} \leq 1 \qquad \text{donc } u_{2n+1} \sim u_{2n+2} \sim u_{2n}$$

$u_{2n+1} \sim u_{2n} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4n}} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2(2n+1)}}$

posons $v_n = \sqrt{2n}\, u_n$

$v_{2n} = \sqrt{4n}\, u_{2n} \to \sqrt{\pi}$

$v_{2n+1} = \sqrt{4n+2}\, u_{2n+1} \to \sqrt{\pi}$

donc $v_n \to \sqrt{\pi}$ donc $\underline{u_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}} \quad (n \to +\infty)}$

on peut penser que $f(x) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}} \quad (x \to +\infty)$

f est ≥ 0 et $\downarrow$ $\qquad u_n = f(n) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad n = \lfloor x \rfloor \quad n \leq x \leq n+1$

$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$

$\underbrace{\sqrt{2n}\, u_{n+1}}_{\to \sqrt{\pi}} \leq \sqrt{2x}\, f(x) \leq \sqrt{2n+2}\, u_n \sim \sqrt{2n}\, u_n \to \sqrt{\pi}$

si $x \to +\infty$ alors $n \to +\infty$ $\quad \sqrt{2x}\, f(x) \to \sqrt{\pi}$

donc $\underline{f(x) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}}} \quad (x \to +\infty)$

corrigé $\boxed{\text{fen 28}}$ analyse

1) $I_{a,b} = \int_0^1 \frac{t^a}{1+t^b} dt$

$t \mapsto \frac{t^a}{1+t^b}$ est cpm sur $]0,1]$

si $t \to 0$

si $b>0$ $\quad \frac{t^a}{1+t^b} \sim t^a = \frac{1}{t^{-a}}$ intégrable en 0 ssi $-a<1$
c'est à dire $a>-1$

si $b=0$ $\quad \frac{t^a}{1+t^b} = \frac{1}{2} t^a$ même résultat. $a>-1$

si $b<0$ $\quad \frac{t^a}{1+t^b} \sim t^{a-b} = \frac{1}{t^{b-a}}$ intégrable en 0 ssi $b-a<1$

donc $I_{a,b}$ converge ssi $\begin{cases} (b \geq 0 \text{ et } a>-1) \\ \text{ou} \\ (b<0 \text{ et } a>b-1) \end{cases}$

2) $a>0, b>0$ $I_{a,b}$ converge.

pour $t \in]0,1[$ $\quad \frac{1}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-t^b)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{bn}$

$I_{a,b} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{a+nb} dt$ $\quad$ problème : $\sum \int_0^1 t^{a+nb} dt$ diverge

on applique le th de conv dominée sur le reste.

$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{a+kb}$ $\quad R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k t^{a+kb}$ $\quad t \in]0,1[$

la série vérifie le TSSA et $\forall t \in]0,1[$ $S_n(t) + R_n(t) = \frac{t^a}{1+t^b}$

S_n est cpm et $t \mapsto \frac{t^a}{1+t^b}$ aussi donc R_n est cpm.

(R_n) CS vers la fonction nulle.

domination : $|R_n(t)| \leq t^{a+(n+1)b} \leq t^a$ intégrable sur $]0,1[$

donc d'après le th de conv dominée $\int_0^1 R_n(t)dt \to 0$ $(n\to+\infty)$

$I_{a,b} = \int_0^1 S_n(t)dt + \int_0^1 R_n(t)dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int_0^1 t^{a+kb} dt + \underbrace{\int_0^1 R_n(t)dt}_{\to 0}$

par passage à la limite $(n\to+\infty)$

$I_{a,b} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{a+kb+1}$

analyse CCINP 2023 en 30

1) $\forall x \in]-1,+\infty[$ $f(x) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$ $\varphi(x) = \int_{x-1}^{x} \ln(f(u)) du$.

1) mq f est continue et >0 sur $]-1\ +\infty[$.

2) relation entre $f(x)$ et $f(x-1)$ pour $x>0$

3) mq φ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

calculer $\varphi'(x)$ et en déduire une expression de $\varphi(x)$.

4) on admet que $\forall x \geq 2$ $\varphi(x) > 0$

déterminer la nature de $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\varphi(n)}$

5) on pose $g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\varphi(n)} x^n$ rayon de conv.

et continuité en 1

---

1) $t \to 0$ $t^x e^{-t} \sim \frac{1}{t^{-x}}$ conv lorsque $-x<1$

$x>-1$

$t \to +\infty$ $t^x e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f ~~existe~~ est définie sur $]-1,+\infty[$

continuité ?

domination locale. $t^x = e^{x \ln t}$

séparer 2 cas suivant que $t \geq 1$ ou $t \leq 1$

si $t \in]0,1]$ $x \in [a,b] \subset]-1,+\infty[$

$a \leq x \leq b$ $\ln t < 0$ $e^{x \ln t} \leq e^{a \ln t}$

$g(x,t) = t^x e^{-t}$ $|g(x,t)| \leq t^a e^{-t}$

et pour $t \geq 1$ $|g(x,t)| \leq t^b e^{-t}$

domination par ψ: $t \in]0,1[\mapsto t^a e^{-t}$

$t \in [1,+\infty[\mapsto t^b e^{-t}$

$t \mapsto t^x e^{-t}$ est cont et >0 donc $f(x) > 0$.

2) $x>0$ $\quad f(x)=\int_0^{+\infty} t^x e^{-t}\,dt$

IPP $\quad u=t^x \qquad u'=x t^{x-1}$

$\qquad v'=e^{-t} \qquad v=-e^{-t}$

$f(x)=\left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} x\, t^{x-1} e^{-t}\,dt$

$f(x)=x f(x-1)$

---

3) $x\in\mathbb{R}_+^*$ $\quad]x-1,x[\subset]-1,+\infty[$

f est continue et >0 donc $u\mapsto \ln f(u)$ est continue

donc TFA φ dérivable

F primitive de $u\mapsto \ln f(u)$

$\varphi(x)=F(x)-F(x-1)$

$\varphi'(x)=F'(x)-F'(x-1)=\ln f(x)-\ln f(x-1)$

$=\ln\left(\frac{f(x)}{f(x-1)}\right)=\ln x$

$\varphi'(x)=\ln x$ $\qquad \varphi\nearrow$ sur $[1,+\infty[$

$\varphi(x)=x\ln x-x+C$

---

4) $n\geq 2$ $\quad u_n=\frac{(-1)^n}{\varphi(n)}$ $\quad (u_n)$ est alternée car $\varphi(n)>0$

$\varphi\nearrow$ sur $[2,+\infty[$ donc $(|u_n|)\searrow \to 0$

$\varphi(n)\to+\infty$ $(n\to\infty)$

$\sum u_n$ vérifie le TSSA donc conv

5) $g(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\varphi(n)}x^n$ $\quad v_n(x)=\frac{(-1)^n x^n}{\varphi(n)}$ $\quad \left|\frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)}\right|=|x|\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}\sim|x|\frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}$

$\to |x|$

$R=1$

pour $x\in[0,1]$ vérifie le TSSA

$|R_n(x)|\leq\frac{1}{\varphi(n+1)}\to 0$ $\quad$ CU sur $[0,1]$

continuité en 1

analyse

$\boxed{\text{ex } 31}$ $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}$

$P \mapsto \int_0^1 P^2(t)\,dt$

1ère méthode : $P = aX^2 + bX + c$

$P^2 = a^2X^4 + b^2X^2 + c^2 + 2ab\,X^3 + 2ac\,X^2 + 2bc\,X$

$\varphi(P) = \frac{a^2}{5} + \frac{b^2}{3} + c^2 + \frac{ab}{2} + \frac{2ac}{3} + bc$

on peut considérer $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$(a,b,c) \mapsto \varphi(P)$ défini précédemment

$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = \frac{2a}{5} + \frac{b}{2} + \frac{2c}{3}$; $\frac{\partial \varphi}{\partial b} = \frac{2b}{3} + \frac{a}{2} + c$; $\frac{\partial \varphi}{\partial c} = 2c + \frac{2a}{3} + b$

φ est C^1 (fonction polynômiale).

$h = (h_1, h_2, h_3)$

$d\varphi(P)(h) = \frac{\partial \varphi}{\partial a}(P)h_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial b}(P)h_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial c}(P)h_3$

à expliciter. Vérifier que $d\varphi(P)(h) = 2\int_0^1 P(t)h(t)\,dt$

avec $h(t) = h_1t^2 + h_2t + h_3$

2ème méthode :

$\varphi : (a,b,c) \mapsto \int_0^1 (at^2+bt+c)^2\,dt$

en justifiant la dérivation sous $\int$ (facile).

$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = \int_0^1 2t^2(at^2+bt+c)\,dt$ $\quad \frac{\partial \varphi}{\partial b} = \int_0^1 2t(at^2+bt+c)\,dt$

$\frac{\partial \varphi}{\partial c} = \int_0^1 2(at^2+bt+c)\,dt$

$d\varphi(P)(h) = h_1\frac{\partial \varphi}{\partial a} + h_2\frac{\partial \varphi}{\partial b} + h_3\frac{\partial \varphi}{\partial c} = 2\int_0^1 (h_1t^2 + h_2t + h_3)(at^2+bt+c)\,dt$

$= 2\int_0^1 h(t)P(t)\,dt$.

avec les notations précédentes.

ex 32 $\quad (x+y)\dfrac{\partial f}{\partial x}+(x-y)\dfrac{\partial f}{\partial y}=0 \quad (*)$

$$\begin{cases} u = x^2-y^2-2xy \\ v = y \end{cases}$$

faisons d'abord le calcul sans nous préoccuper des propriétés du cht de var.

$$f(x,y)=g(u,v)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=(2x-2y)\frac{\partial g}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=(-2y-2x)\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$(*):\quad 2(x^2-y^2)\frac{\partial g}{\partial u}-2(x^2-y^2)\frac{\partial g}{\partial u}+(x-y)\frac{\partial g}{\partial v}=0$$

$$(x-y)\frac{\partial g}{\partial v}=0$$

si on suppose $x-y>0$ (ou $x-y\neq 0$)

$$\frac{\partial g}{\partial v}=0 \qquad g(u,v)=h(u)$$

$$f(x,y)=h(x^2-y^2-2xy) \qquad h\ C^1$$

$\varphi : (x,y)\mapsto (u,v)=(x^2-y^2-2xy,\, y)$

bijective ? $\quad \begin{cases} u = x^2-y^2-2xy \\ v = y \end{cases}$

$$x^2-2v\,x-v^2-u=0$$

$$\Delta = 4v^2-4(-v^2-u)=8v^2+4u=4(2v^2+u)$$

si on suppose $\Delta>0 \quad 2v^2+u>0$

$\rightarrow$

2 sol : $x_1 = v - \sqrt{2v^2+u}$

$x_2 = v + \sqrt{2v^2+u}$

unique sol si on impose $x - y > 0$ $(\Leftrightarrow x - v > 0)$

$\varphi : A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y > 0\} \to \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 2v^2+u > 0\} = B$

$(x,y) \longmapsto (x^2 - y^2 - 2xy, y)$

φ bij ? si $x - y > 0$ alors $2v^2+u > 0$

(car $2v^2+u = (x-y)^2$)

φ va bien de A dans B

de plus si $(u,v) \in B$, $\exists! (x,y) \in A$ tq $(u,v) = \varphi(x,y)$

$$\begin{cases} x = v + \sqrt{2v^2+u} \\ y = v \end{cases}$$

$\varphi^{-1} : B \to A$

$(u,v) \longmapsto (v + \sqrt{2v^2+u}, v)$

φ est bij de A dans B, A et B sont ouverts,

φ est C^1 et φ^{-1} est C^1 : OK.

corrigé $\boxed{\text{ex } 34}$ analyse

1) $D = \{(x,y,z) \in]0,1[^3 \mid x+y+z<1\}$

Soit $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z<1\}$

on a $D =]0,1[^3 \cap A$

$]0,1[^3$ est un ouvert et $A = g^{-1}(]-\infty,1[)$ avec $g : (x,y,z) \mapsto x+y+z$

g est continue et $]-\infty,1[$ est ouvert donc A est ouvert

D est l'intersection de 2 ouverts donc $\underline{D \text{ est un ouvert}}$

2) f est polynômiale donc C^2 sur $\mathbb{R}^3$

3) $f : (x,y,z) \mapsto x^n + y^n + z^n + (1-x-y-z)^n$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = nx^{n-1} - n(1-x-y-z)^{n-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = ny^{n-1} - n(1-x-y-z)^{n-1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = nz^{n-1} - n(1-x-y-z)^{n-1}$$

(x,y,z) est un point critique $\Leftrightarrow \begin{cases} x^{n-1} = (1-x-y-z)^{n-1} & (1) \\ y^{n-1} = (1-x-y-z)^{n-1} & (2) \\ z^{n-1} = (1-x-y-z)^{n-1} & (3) \end{cases}$

on a alors $x^{n-1} = y^{n-1} = z^{n-1}$

et comme $x,y,z \in]0,1[$ on a $x=y=z$ (par $(x,y,z) \in D$)

on reporte dans (1) $x^{n-1} = (1-3x)^{n-1}$

$x+y+z<1$ par $(x,y,z) \in D$

donc $3x < 1$ donc $1-3x > 0$ donc $x = 1-3x$

(par $x=y=z$) donc $x = \frac{1}{4}$ donc $y = z = x = \frac{1}{4}$

$a = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ est alors le seul point critique de f dans D

4) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = n(n-1)x^{n-2} + n(n-1)(1-x-y-z)^{n-2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = n(n-1)\left((\tfrac{1}{4})^{n-2} + (\tfrac{1}{4})^{n-2}\right) = 2n(n-1)(\tfrac{1}{4})^{n-2}$$

idem $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = 2n(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = n(n-1)(1-x-y-z)^{n-2}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = n(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2}$

idem pour $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$

$$H_f(a) = n(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ on trouve $\chi_A = (X-1)^2(X-4)$

les valeurs propres de A sont strictement positives

donc $A \in S_3^{++}(\mathbb{R})$ $\quad n(n-1)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} > 0$

donc $H_f(a) \in S_3^{++}(\mathbb{R})$ donc f admet un minimum local en a.

5) $P(X_1 = X_2 = \dots = X_n) = \sum_{k=0}^{3} P(X_1 = k, X_2 = k, \dots, X_n = k)$

et par indépendance

$$P(X_1 = X_2 = \dots = X_n) = \sum_{k=0}^{3} (P(X_1 = k))^n$$

posons $x = P(X_1 = 0)$; $y = P(X_1 = 1)$; $z = P(X_1 = 2)$

on a alors $x, y, z \in]0,1[$ et $x+y+z = P(X_1 = 3) < 1$

$P(X_1 = X_2 = \dots = X_n) = x^n + y^n + z^n + (1-x-y-z)^n$

on admet que le minimum de f en a est global

donc $\forall (x,y,z) \in D$ $\quad f(x,y,z) \geq f(a) = 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{1}{4^{n-1}}$

donc

$$P(X_1 = X_2 = \dots = X_n) \geq \frac{1}{4^{n-1}}$$
