corrigé algèbre
Mines 2024.

en 2

$n \geq 2$

1) montrer l'existence d'un polyn réel P_n tq
$$(1+iX)^{2n+1} - (1-iX)^{2n+1} = 2iX\, P_n(X^2).$$

2) deg P_n et coeff dom.

3) racines de P_n

4) calculer $\sum_{k=1}^{n} \tan^2 \frac{k\pi}{2n+1}$, $\prod_{k=1}^{n} \tan^2 \frac{k\pi}{2n+1}$, $\prod_{k=1}^{n} \left(4+\tan^2 \frac{k\pi}{n}\right)$

---

1) Soit $Q_n = (1+iX)^{2n+1} - (1-iX)^{2n+1}$
$$= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(i^k - (-i)^k\right) X^k$$
les termes pour k pair sont nuls
si k est impair $k=2p+1$ $i^k - (-i)^k = i^{2p+1} - (-1)^{2p+1} i^{2p+1}$
$= 2i(-1)^p$

$$Q_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} 2i(-1)^p X^{2p+1} = 2iX \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p X^{2p}$$

on pose $P_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p X^p$ ça marche.

2) $\deg P_n = n$ et coeff dom de $P_n = (-1)^n$ (pour $p=n$)

3) 0 n'est pas racine de P_n. (coeff cste $\neq 0$)

Soit $x \in \mathbb{C}$ tq $Q_n(x) = 0$

$$0 = (1+ix)^{2n+1} - (1-ix)^{2n+1} = 2ix\, P_n(x^2)$$

x^2 est alors racine de P_n.

$x \neq i$
$x \neq -i$
$$\frac{1+ix}{1-ix} = e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}} \quad k \in [\![0, 2n]\!].$$

$k=0$ pas possible car sinon
$1+ix = 1-ix \Rightarrow x=0$
$\Rightarrow k \in [\![1, 2n]\!]$

$$1+ix=(1-ix)\,e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}$$

$$ix+ix\,e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}=e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}-1$$

$$ix=\frac{e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}-1}{1+e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}}$$

peut-on avoir $e^{\frac{2ik\pi}{2n+1}}=-1$?

$$\Leftrightarrow \frac{2k\pi}{2n+1}=\pi+2k'\pi$$

$$2k\pi=(2n+1)\pi+2k'(2n+1)\pi$$

$$2k=2n+1+2k'(2n+1)$$

pas possible ($2n+1$ impair)

$$x=-i\,\frac{2i\sin\frac{k\pi}{2n+1}}{2\cos\frac{k\pi}{2n+1}}$$

$$x=\tan\frac{k\pi}{2n+1}$$

donc $\tan^2\frac{k\pi}{2n+1}$ est racine de P_n.

posons $y_k=\tan^2\frac{k\pi}{2n+1}$ $\quad k\in[\![1,n]\!]$

$0\leq\frac{k\pi}{2n+1}<\frac{\pi}{2}$

$\tan^2$ est inj.

donc les y_k sont $\neq$

les racines de P_n sont $\left(\tan^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$.

$$P_n=(-1)^n\prod_{k=1}^{n}\left(X-\tan^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\tan^2\frac{k\pi}{2n+1}=-\frac{a_{n-1}}{a_n}=-\frac{\binom{2n+1}{2n-1}(-1)^{n-1}}{(-1)^n}=\binom{2n+1}{2n-1}=\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!\,2!}=\frac{(2n+1)(2n)}{2}$$

$$=n(2n+1)$$

$$\prod_{k=1}^{n}\tan^2\frac{k\pi}{2n+1}=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}=\frac{(-1)^n\binom{2n+1}{1}}{(-1)^n}=2n+1$$

$$\prod_{k=1}^{n}\left(4+\tan^2\frac{k\pi}{2n+1}\right)=P_n(-4)=P_n((2i)^2)=\frac{(1+i(2i))^{2n+1}-(1-i(2i))^{2n+1}}{(2i)(2i)}$$

$$=\frac{-1-3^{2n+1}}{-4}=\frac{1+3^{2n+1}}{4}$$

ex 3 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ $M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2+M=A$ (1)

$\det A=0$ donc $\det(M^2+M)=0$

donc $(\det M)\det(M+I_2)=0$

$\det M=0$ ou $\det(M+I_2)=0$

donc 0 ou -1 sont valeurs propres de M

(Rappel: λ est valeur propre de M ssi $\det(M-\lambda I)=0$)

λ_1,λ_2 les valeurs propres de M (dans $\mathbb{C}$ a priori)

alors $\mathrm{tr}(M)=\lambda_1+\lambda_2$

$\mathrm{tr}(M^2)=\lambda_1^2+\lambda_2^2$

(car M est semblable à une matrice triangulaire $\begin{pmatrix}\lambda_1&*\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$

et M^2 semblable à $\begin{pmatrix}\lambda_1^2&(*)\\0&\lambda_2^2\end{pmatrix}$)

donc $\mathrm{tr}(M^2)+\mathrm{tr}(M)=\mathrm{tr}(A) \Rightarrow \lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_1+\lambda_2=2$

1er cas: Si 0 est valeur propre de M (par ex $\lambda_1=0$)

alors $\lambda_2^2+\lambda_2-2=0$ donc $\lambda_2=1$ ou -2

les vp de M sont $(0,1)$ ou $(0,-2)$

2ème cas: si -1 est vp de M ($\lambda_1=-1$)

alors $\lambda_2^2+\lambda_2-2=0$ $\lambda_2=1$ ou -2

les vp de M sont $(-1,1)$ ou $(-1,-2)$

Dans les 2 cas, M possède 2 vp distinctes donc M est diagonalisable

M est semblable à D_1 ou D_2 ou D_3 ou D_4

avec $D_1=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ $D_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&-2\end{pmatrix}$ $D_3=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $D_4=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-2\end{pmatrix}$

$M=PDP^{-1}$ avec $D=D_1$ ou D_2 ou D_3 ou D_4

$M^2=PD^2P^{-1}$

$M^2 + M = A \rightsquigarrow D^2 + D = P^{-1}AP$

Ex 3

donc $P^{-1}AP$ est diagonale

donc P est la matrice de passage qui diagonalise A

A est semblable à $D' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$D' = P^{-1}AP$

et $M = PDP^{-1}$ (avec la même matrice P)

donc on a 4 solutions

$M_1 = PD_1P^{-1}$; $M_2 = PD_2P^{-1}$; $M_3 = PD_3P^{-1}$; $M_4 = PD_4P^{-1}$

(à calculer explicitement)

algèbre (en 6)

<u>erreur d'énoncé !</u>

$n \in \mathbb{N}^*$ $(x_0 \dots x_n)$ subdivision de $[0,1]$

Montrer $\underbrace{\exists (\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \forall P \in \mathbb{R}_n[X],}$ $\int_0^1 P(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(x_i)$

ordre exact des quantificateurs
(les α_i alors ne doivent pas dépendre de P)

les coeff α_i sont-ils uniques ? Résultat vrai si $\deg P > n$?

Soient $L_0, \dots, L_n$ les polynômes de Lagrange associés à $(x_0, \dots, x_n)$

$P \in \mathbb{R}_n[X]$ $\quad P = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) L_i$

$\int_0^1 P(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} P(x_i) \int_0^1 L_i(t)\,dt$ (somme finie)

on pose $\alpha_i = \int_0^1 L_i(t)\,dt$ alors $\int_0^1 P(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P(x_i)$

α_i ne dépend pas de P.

Montrons que les α_i sont uniques.

Soient $(\beta_0, \dots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\int_0^1 P(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} \beta_i P(x_i)$

alors $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i P(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i P(x_i)$ $\quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X]$

on pose $\gamma_i = \alpha_i - \beta_i$

$\sum_{i=0}^{n} \gamma_i P(x_i) = 0$

en prenant successivement $P = 1, X, X^2, \dots, X^n$

on obtient $\begin{cases} \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n = 0 \\ \gamma_0 x_0 + \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_n x_n = 0 \\ \vdots \\ \gamma_0 x_0^n + \gamma_1 x_1^n + \dots + \gamma_n x_n^n = 0 \end{cases}$

c'est un système linéaire dont les inconnues sont $\gamma_0, \dots, \gamma_n$ et dont le déterminant est $V(x_0, \dots, x_n)$ qui n'est pas nul.

donc les γ_i sont tous nuls donc $\forall i$ $\alpha_i = \beta_i$ donc les α_i sont <u>uniques</u>

résultat faux si $\deg P > n$

prendre par ex $n = 1$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ $\quad P(t) = t(t-1)$

$\int_0^1 P(t)\,dt = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \neq \alpha_0 P(0) + \alpha_1 P(1)$

algèbre

ex 8

dim $E = n$ $\quad rg\, g = 1 \quad f \in GL(E)$

$rg(g \circ f^{-1}) = 1$ (on ne modifie pas le rang en composant par une application bijective).

($\Rightarrow$) Supposons que $f+g$ est inversible (bijectif)

alors $\det(f+g) \neq 0$

comme f est bijective, cela veut dire que

$\det f \det(Id + g\circ f^{-1}) \neq 0$

donc $\det(Id + g\circ f^{-1}) \neq 0$

$\chi_{g\circ f^{-1}}(x) = \det(x\, Id - g\circ f^{-1})$

$\chi_{g\circ f^{-1}}(-1) = \det(-Id - g\circ f^{-1}) = (-1)^n \det(Id + g\circ f^{-1})$

donc $\chi_{g\circ f^{-1}}(-1) \neq 0$

-1 n'est pas valeur propre de $g\circ f^{-1}$

$rg(g\circ f^{-1}) = 1 \rightarrow \dim Ker(g\circ f^{-1}) = n-1$

0 est valeur propre d'ordre au moins $n-1$ de $g\circ f^{-1}$

la dernière valeur propre de $g\circ f^{-1}$ est $tr(g\circ f^{-1})$

donc $tr(g\circ f^{-1}) \neq -1$

($\Leftarrow$) idem.

pour plus de clarté, on aurait pu raisonner par l'autraposée

si $Tr(g\circ f^{-1}) = -1$, les valeurs propre de $g\circ f^{-1}$ sont 0 d'ordre $n-1$ et -1 d'ordre 1 (car $rg(g\circ f^{-1}) = 1$)

donc $\chi_{g\circ f^{-1}}(-1) = 0$

donc $\det(I_d + g\circ f^{-1}) = 0$ donc $\det(f+g) = 0$

algèbre

ex 11. A une matrice de projection $A^2 = A$

$\varphi : M \mapsto \frac{1}{2}(AM + MA)$

1) $A = Mat_B(u)$ u projecteur

$E = \operatorname{Im} u \oplus \operatorname{Ker} u \qquad r = rg A = rg u.$

donc une base B' adaptée à cette décomposition

$$D = Mat_{B'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ (0) & & & 0 \ddots 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$D = P^{-1}AP \qquad P = P_{BB'}$ donc A est semblable à D

2) $\psi : M \mapsto \frac{1}{2}(DM + MD)$

on cherche les vp de ψ :

Soit λ une valeur propre de ψ : $\exists M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $M \neq 0$ tel que $\psi(M) = \lambda M$

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_3 \\ M_2 & M_4 \end{pmatrix} \quad \text{avec } M_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C})$$

$$\psi(M) = \begin{pmatrix} M_1 & \frac{1}{2}M_3 \\ \frac{1}{2}M_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi(M) = \lambda M \Leftrightarrow \begin{cases} M_1 = \lambda M_1 \\ \frac{1}{2}M_3 = \lambda M_3 \\ \frac{1}{2}M_2 = \lambda M_2 \\ 0 = \lambda M_4 \end{cases}$$

1er cas : $\lambda = 1$ les équations précédentes donnent $M_3 = 0$

$M_2 = 0$ et $M_4 = 0$

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc 1 est vp et $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid M_1 \in \mathcal{M}_r(\mathbb{C}) \right\}$

$\dim E_1 = r^2$

2ème cas : $\lambda = \frac{1}{2}$: les équations précédentes donnent

$M_1 = 0$ et $M_4 = 0$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & M_3 \\ M_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{\frac{1}{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & M_3 \\ M_2 & 0 \end{pmatrix} \mid M_3 \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{C}),\ M_2 \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{C}) \right\}$$

$\dim E_{\frac{1}{2}} = 2r(n-r)$ (M)

<u>3ème cas</u> : $\lambda = 0$ les équations donnent $M_1 = 0$ $M_3 = 0$, $M_2 = 0$

$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_4 \end{pmatrix}$ $E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_4 \end{pmatrix} \mid M_4 \in \mathcal{M}_{n-r}(\mathbb{C}) \right\}$

$\dim E_0 = (n-r)^2$

<u>4ème cas</u> : $\lambda \neq 0, \lambda \neq 1, \lambda \neq \frac{1}{2}$ les équations donnent

$M_1 = 0$, $M_2 = 0$, $M_3 = 0$, $M_4 = 0$

pas possible

donc $Sp(\varphi) = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

et $\dim E_0 + \dim E_1 + \dim E_{\frac{1}{2}} = (n-r)^2 + r^2 + 2r(n-r)$
$= n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

donc : <u>φ est diagonalisable</u>

3) φ est diagonalisable donc il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de φ.

$\mathcal{B} = (E_1, E_2, \dots, E_{n^2})$ cette base

$\varphi(E_i) = \lambda_i E_i$ avec λ_i vp de φ.

$\varphi(M) = \frac{1}{2}(AM + MA) = \frac{1}{2}(PDP^{-1}M + MPDP^{-1})$

$= P(\frac{1}{2}DN + ND)P^{-1}$ avec $N = P^{-1}MP$

$= P\varphi(N)P^{-1} = P\varphi(P^{-1}MP)P^{-1}$

considérons $E'_i = PE_iP^{-1}$ $E'_i \neq 0$ car $E_i \neq 0$ (P inversible)

$\varphi(E'_i) = P\varphi(E_i)P^{-1} = P\lambda_i E_i P^{-1} = \lambda_i PE_iP^{-1} = \lambda_i E'_i$

donc E'_i est un vecteur propre de φ associé à λ_i.

il est facile de montrer que $(E'_1, \dots, E'_{n^2})$ est libre (car $(E_1, \dots, E_{n^2})$ est libre) donc c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ formée de vecteurs propres de φ

donc <u>φ est diagonalisable</u>

algèbre

ex 12 1) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 + N$ avec $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $N^3 = 0$ (matrice nilpotente d'ordre 3)

I_3 et N commutent

donc $M^n = (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k}$

$M^n = \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2$

$M^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

on peut aussi remarquer que M^n s'écrit comme CL de I_3, M, M^2

$M^n = I_3 + n(M - I_3) + \frac{n(n-1)}{2} (M - I_3)^2$

$M^n = I_3 + nM - nI_3 + \frac{n(n-1)}{2} (M^2 - 2M + I_3)$

$M^n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} I_3 + n(2-n)M + \frac{n(n-1)}{2} M^2$

$\forall n \in \mathbb{N}$

(marche aussi pour $n=0$ et $n=1$)

2) $I_3, M, M^2 \in F$ de façon évidente.

or $\forall n$ M^n est CL de I_3, M, M^2

tout élément de F est CL de $I_3, M, M^2, \dots, M^n \dots$

donc tout élément de F est CL de I_3, M, M^2

donc $F = \text{Vect}(I_3, M, M^2)$

$\alpha I_3 + \beta M + \gamma M^2 = 0 \Rightarrow \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \beta+2\gamma=0 \\ \beta+3\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=\gamma=0$$

en 12

la famille (I_3, M, M^2) est génératrice de F et libre c'est donc une base de F.

(on peut aussi citer (I_3, N, N^2) comme base de F)

$\dim F = 3$

3) $C(M) = \{A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$

Si $A \in F$, $A = \alpha I_3 + \beta M + \gamma M^2$

$AM = \alpha M + \beta M^2 + \gamma M^3 = MA$

donc $A \in C(M)$

donc $F \subset C(M)$

réciproquement, soit $A \in C(M)$ $AM = MA$

$M = Mat_B(f)$ B base canonique de $\mathbb{R}^3$

f admet 1 comme vp triple

$M - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $E_1 = Vect(e_1)$

$A = Mat_B(g)$ f et g commutent car A et M commutent

donc E_1 est stable par g $g(e_1) \in Vect(e_1)$

$A = \begin{pmatrix} \alpha & a & d \\ 0 & b & e \\ 0 & c & h \end{pmatrix}$ on écrit $AM = MA$

on obtient $\begin{cases} \alpha+a = a+b+c \\ b = b+c \\ \alpha+a+d = d+e+h \\ b+e = e+h \\ c+h = h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = b+c \Rightarrow \alpha = b \\ c = 0 \\ \alpha+a = e+h \Rightarrow a = e \\ b = h \Rightarrow h = b = \alpha \\ c = 0 \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} b & a & d \\ 0 & b & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = bI_3 + aN + dN^2 = bI_3 + a(M - I_3) + d(M - I_3)^2 \in F$

donc $C(M) \subset F$ donc $C(M) = F$

n°16 algèbre

$P \in \mathbb{R}_n[X]$ $\quad f(P) = X(X-1)P' - nXP$

f est linéaire de façon évidente

si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\deg P \leq n$ $\quad P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ $\deg f(X^k) \leq n$ (car somme de 2 polynômes de degré $\leq n$)

$f(X^n) = X(X-1)nX^{n-1} - nX^{n+1} = nX^n(X-1-X) = -nX^n$

$\deg f(X^n) \leq n$ donc $\deg f(P) \leq n$ $\quad f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$

$f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$

on calcule $f(X^k)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$

$f(1) = -nX$ $\quad B = (1, X, \dots, X^n)$ base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$

$f(X) = (1-n)X^2 - X$

$\vdots$

$f(X^k) = (k-n)X^{k+1} - kX^k$

$\vdots$

$f(X^n) = -nX^n$

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ -n & -1 & 0 & & (0) \\ 0 & 1-n & -2 & & \\ \vdots & 0 & 2-n & \ddots & \\ \vdots & \vdots & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & & -n \end{pmatrix}$$

matrice triangulaire de coeff diagonaux $0, -1, -2, \dots, -n$

f admet $n+1$ valeurs propres distinctes donc f est diagonalisable

$Sp(f) = \{-k \mid k \in [\![0, n]\!]\}$

E_{-k} est de dimension 1.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$ on cherche $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f(P) = -kP$

$X(X-1)P' - nXP = -kP$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad x(x-1)P'(x) + (k - nx)P(x) = 0$

on résoud cette équa diff par ex sur $]1, +\infty[$

$\forall x \in]1, +\infty[$ $\quad P'(x) - \dfrac{nx-k}{x(x-1)} P(x) = 0$

$$\frac{nx-k}{x(x-1)} = \frac{k}{x} + \frac{n-k}{x-1}$$ (décomposition en élts simples)

$$P(x) = \alpha \exp\left(k \ln x + (n-k)\ln(x-1)\right) \quad \forall x \in]1,+\infty[$$

$$P(x) = \alpha x^k (x-1)^{n-k} \quad \forall x \in]1,+\infty[$$

le polynôme $P - X^k(X-1)^{n-k}$ admet une infinité de racines donc il est nul

$\Rightarrow P = \alpha X^k (X-1)^{n-k}$

$\underline{E_{-k} = \mathrm{Vect}\left(X^k(X-1)^{n-k}\right)}$ $\quad k \in [\![0,n]\!]$.

(H) $M = \begin{array}{c} \\ p \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & n \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cc} p & n \end{array} \end{array}\begin{array}{c} \\ p \\ n \end{array}$ $A \in GL_p(\mathbb{R})$ $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$

$C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Ex 17

($\Leftarrow$) Supposons $D = CA^{-1}B$

$\begin{array}{c} p \\ n \end{array}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} AX_1 + BX_2 = 0 \\ CX_1 + DX_2 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} AX_1 + BX_2 = 0 \\ CX_1 + CA^{-1}BX_2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} X_1 = -A^{-1}BX_2 \\ -CA^{-1}BX_2 + CA^{-1}BX_2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow X_1 = -A^{-1}BX_2$

$X = \begin{pmatrix} -A^{-1}BX_2 \\ X_2 \end{pmatrix}$ $\quad \dim \operatorname{Ker} M = n$

$\operatorname{rg} M = p.$

($\Rightarrow$) Supposons $\operatorname{rg} M = p$

$X \in \operatorname{Ker} M \Leftrightarrow \begin{cases} AX_1 + BX_2 = 0 \\ CX_1 + DX_2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} X_1 = -A^{-1}BX_2 \\ -CA^{-1}BX_2 + DX_2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = -A^{-1}BX_2 \\ X_2 \in \operatorname{Ker}(D - CA^{-1}B) \end{cases}$

$\dim \operatorname{Ker}(D - CA^{-1}B) \leq n$ (matrice de taille n)

Soit $q = \dim \operatorname{Ker}(CA^{-1}B - D)$ $\quad q \leq n$

$E_1, \dots, E_q$ base de $\operatorname{Ker}(CA^{-1}B - D)$

$$\operatorname{Ker} M = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} -A^{-1}BE_i \\ E_i \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq q}$$

$\begin{pmatrix} -A^{-1}BE_i \\ E_i \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq q}$ est génératrice de $\operatorname{Ker} M$.

libre (car les E_i sont libres)

donc $\dim \operatorname{Ker} M = q = n$

donc $\dim \operatorname{Ker}(CA^{-1}B - D) = n$

$\operatorname{Ker}(CA^{-1}B - D) = \mathbb{R}^n$

$\rightarrow CA^{-1}B - D = 0$

algèbre

$\boxed{\text{ex 18}}$ E euclidien $u \in \mathcal{L}(E)$

tel que $\forall x \in E \quad \|u(x)\| \leq \|x\|$

$$P_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k \qquad F = \mathrm{Ker}(u - Id) \quad G = \mathrm{Im}(u - Id)$$

- pour $x_1 \in F$ $\quad u(x_1) = x_1$ donc par récurrence $\forall k \; u^k(x_1) = x_1$

  donc $P_n(x_1) = x_1$

- pour $x_2 \in G$ $\quad \exists x_3 \in E, \; x_2 = u(x_3) - x_3$

  $u(x_2) = u^2(x_3) - u(x_3) \qquad u^k(x_2) = u^{k+1}(x_3) - u^k(x_3)$

  $$P_n(x_2) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} (u^{k+1}(x_3) - u^k(x_3))\right)$$

  $$P_n(x_2) = \frac{1}{n+1}(u^{n+1}(x_3) - x_3) \quad \text{(somme telescopique)}$$

- Soit $x \in F \cap G$ alors $\quad P_n(x) = x$ et $P_n(x) = \frac{1}{n+1}(u^{n+1}(x') - x')$

  avec $x = u(x') - x'$

  $$\|P_n(x)\| \leq \frac{1}{n+1}(\|u^{n+1}(x')\| + \|x'\|)$$

  or $\forall x \quad \|u(x)\| \leq \|x\|$ donc $\|u^2(x)\| \leq \|u(x)\| \leq \|x\|$

  et donc par récurrence $\|u^k(x)\| \leq \|x\|$

  donc ici $\|u^{n+1}(x')\| \leq \|x'\|$

  donc $\|P_n(x)\| \leq \frac{2}{n+1}\|x'\| \to 0 \quad (n \to +\infty)$

  donc $\|P_n(x)\| \to 0 \; (n \to +\infty)$ et $P_n(x) = x$

  par unicité de la limite $\|x\| = 0$ donc $x = 0$

  $F \cap G = \{0\}$ et par le th du rang $E = F \oplus G$.

- $\forall x \in E, \quad x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F, \; x_2 \in G$

  $P_n(x_1) = x_1$ et $P_n(x_2) \to 0 \; (n \to +\infty)$ d'après ce qui précède

  donc $P_n(x) \underset{n \to +\infty}{\to} x_1 = p(x)$ avec p la projection sur F parallèlement à G

- p est linéaire en dim finie donc continue

  $G = \mathrm{Ker}\, p = p^{-1}(\{0\})$ $\quad \{0\}$ est fermé donc G est fermé.

algèbre (en 20)

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\quad A = (a_{ij})$ $\quad M = (m_{ij}) \in S_n(\mathbb{R})$

déterminer $\displaystyle \inf_{M \in S_n} \Big(\sum_{1 \leq i,j \leq n} (m_{ij} - a_{ij})^2$

$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $(A|B) = \operatorname{tr}(A^T B)$

cela définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$(A|A) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij}^2$$

donc $\displaystyle \sum_{1 \leq i,j \leq n} (m_{ij} - a_{ij})^2 = (M - A | M - A) = \|M - A\|^2$

$$\inf_{M \in S_n} \|M - A\|^2 = (d(A, S_n))^2$$

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} S_n(\mathbb{R})$ $\qquad \left(A = \dfrac{A + A^T}{2} + \dfrac{A - A^T}{2} \right)$

P_{S_n} = projection orthogonale sur S_n

$P_{S_n}(A) = \dfrac{A + A^T}{2}$ $\quad$ donc $d(A, S_n)^2 = \|A - P_{S_n}(A)\|^2 = \|P_{\mathcal{A}_n}(A)\|^2$

$$= \left\| \frac{A - A^T}{2} \right\|^2$$

$$d(A, S_n)^2 = \operatorname{tr}\left(\left(\frac{A - A^T}{2}\right)^T \left(\frac{A - A^T}{2}\right) \right) = \frac{1}{4} \operatorname{tr}\big((A^T - A)(A - A^T) \big)$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{tr}\left(A^T A - A^2 + A A^T - A^{T2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left[\operatorname{tr} A^T A + \operatorname{tr}(A A^T) - \operatorname{tr}(A^2) - \operatorname{tr}(A^{T2}) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\operatorname{tr}(A^T A) - \operatorname{tr}(A^2) \right]$$