2024 algèbre (en 23)

- $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A inv. mq $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
résultat valable si A non inv.

- $M \in M_n(\mathbb{R})$. $M^T M$ et $M M^T$ sont $\perp$ semblables.

$\forall x \in K \quad \chi_{AB}(x) = \det(xI_n - AB)$

$BA = A^{-1}(AB)A$ $\quad$ AB et BA sont semblables donc ont le m̂ polyn carac

si A non inversible, A est la limite ~~d'~~ d'une suite de matrices inv.

$\forall P C R \quad A - \frac{1}{k} I_n$ est inv.

$A_k = A - \frac{1}{k} I_n$.

$\forall x \quad \det(xI_n - A_k B) = \det(x I_n - B A_k)$

$A_k \to A$ par continuité du produit et du det

$\det(xI_n - A_k B) \to \det(x I_n - AB)$

$\det(xI_m - B A_k) \to \det(xI_n - BA)$

par unicité de la lim $\det(x I_n - AB) = \det(xI_n - BA)$ $\forall x$

$\chi_{BA} = \chi_{AB}$.

- $M^T M$ et MM^T sont diagonalisables (car sym réelles) et ont le m̂ polyn caract donc sont semblables à la m̂ matrice diagonale.

$M^T M = P D P^{-1}$ $\quad$ $P \in O_n(\mathbb{R})$

$MM^T = Q D Q^{-1}$ $\quad$ $Q \in O_n(\mathbb{R})$

$M^T M = P(Q^{-1} MM^T Q) P^{-1}$

$PQ^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$

corrigé $\boxed{\text{ex } 28}$ algèbre

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & & (a) \\ & \ddots & \\ (a) & & b_n \end{bmatrix} \qquad P = \prod_{i=1}^{n} (b_i - X)$$

1) $n=2$ $\quad A = \begin{bmatrix} b_1 & a \\ a & b_2 \end{bmatrix} \quad \det A = b_1 b_2 - a^2$

$P = (b_1 - X)(b_2 - X) \qquad P(a) = (b_1 - a)(b_2 - a) = b_1 b_2 - a(b_1+b_2) + a^2$

$P' = -(b_1 - X) - (b_2 - X) \qquad P'(a) = -(b_1 - a) - (b_2 - a) = 2a - b_1 - b_2$

$a P'(a) = 2a^2 - a(b_1 + b_2)$

$aP'(a) - P(a) = 2a^2 - a(b_1+b_2) - b_1 b_2 + a(b_1+b_2) - a^2 = a^2 - b_1 b_2$

donc $\underline{\det A = P(a) - aP'(a)}$

2) $\varphi(x) = \det(A - xJ) = \begin{vmatrix} b_1 - x & & (a-x) \\ & \ddots & \\ (a-x) & & b_n - x \end{vmatrix}$

a) on note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de $\det(A - xJ)$

on effectue $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$; $C_3 \leftarrow C_3 - C_1, \dots \; C_n \leftarrow C_n - C_1$

$$\varphi(x) = \begin{vmatrix} b_1 - x & a - b_1 & a - b_1 & \cdots & a - b_1 \\ a - x & b_2 - a & 0 & & \\ \vdots & 0 & b_3 - a & \ddots & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ a - x & 0 & 0 & & b_n - a \end{vmatrix}$$

on peut remarquer qu'il reste des x seulement sur la 1ère colonne donc si on développe / à la 1ère colonne, on obtient que $\varphi(x)$ est CL à coefficients constants des fonctions $x \mapsto b_1 - x$ et $x \mapsto a - x$

donc φ est polynômiale de degré ≤ 1

φ est donc une fonction affine : $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \; \varphi(x) = \alpha x + \beta$

b)

$$\varphi'(x) = \begin{vmatrix} -1 & a-x & \cdots & a-x \\ \vdots & b_2 - x & & \\ \vdots & a-x & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \\ -1 & a-x & & b_n - x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 - x & -1 & a-x & \cdots & a-x \\ a-x & -1 & a-x & & \\ \vdots & \vdots & b_3 - x & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ a-x & -1 & & & b_n - x \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} b_1 - x & \cdots & a-x & -1 \\ a-x & \ddots & a-x & \vdots \\ \vdots & a-x & \ddots & \vdots \\ \vdots & & b_{n-1} - x & \vdots \\ a-x & & & -1 \end{vmatrix}$$

$$\varphi'(a) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & & \\ \vdots & b_2-a & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \\ -1 & (0) & & b_n-a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1-a & -1 & 0 & & \\ 0 & -1 & 0 & & \\ \vdots & -1 & b_3-a & & \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & -1 & \vdots & & b_n-a \end{vmatrix}$$

$$+ \dots + \begin{vmatrix} b_1-a & & & -1 \\ & \ddots & (0) & \vdots \\ (0) & & b_{n-1}-a & \vdots \\ & & & -1 \end{vmatrix}$$

le 1er déterminant et le dernier sont triangulaires.
pour les autres, on développe par rapport à la ligne qui contient un -1 sur la diagonale et des 0 ailleurs.
on obtient aussi des déterminants triangulaires.

$$\varphi'(a) = -(b_2-a)\cdots(b_n-a) - (b_1-a)(b_3-a)\cdots(b_n-a)$$
$$- (b_1-a)(b_2-a)(b_4-a)\cdots(b_n-a) + \dots + (-1)(b_1-a)\cdots(b_{n-1}-a)$$
$$= P'(a)$$

c) $\varphi'(x) = \alpha$ donc $\varphi'(a) = \alpha = P'(a)$

$\varphi(x) = P'(a)\, x + \beta$

$\beta = \varphi(0) = \det A$

donc $\varphi(a) = P'(a)\, a + \det A$ et $\varphi(a) = P(a)$

$\Rightarrow$ $\underline{\det A = P(a) - a P'(a)}$

algèbre ex 32

$E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ $\quad G(f) : x \mapsto \int_0^1 \min(x,t) f(t)\,dt$ $\quad (x \in [0,1])$

1) $G(f)(x) = \int_0^x t f(t)\,dt + \int_x^1 x f(t)\,dt$

f est continue donc d'après le TFA $G(f)$ est C^1

en particulier $G(f) \in E$

$G(\alpha f_1 + f_2) = \alpha G(f_1) + G(f_2)$ par linéarité de l'intégrale

donc $G \in \mathcal{L}(E)$

2) $f \in \operatorname{Ker} G$: $G(f) = 0$ et f continue sur $[0,1]$

$\forall x \in [0,1] \quad G(f)(x) = 0$

calculons $G(f)'(x) = x f(x) + x(-f(x)) + \int_x^1 f(t)\,dt$

$G(f)'(x) = \int_x^1 f(t)\,dt$

$G(f)'$ est C^1 d'après TFA et $G(f)''(x) = -f(x)$

donc $G(f)'' = -f$

donc si $G(f) = 0$ alors $f = 0$ donc $\operatorname{Ker} G = \{0\}$

pour $f \in E$, on remarque que $G(f)$ est de classe C^2 sur $[0,1]$

que $G(f)(0) = 0$ et $G(f)'(1) = 0$

donc $\operatorname{Im} G \subset \{h \in C^2([0,1],\mathbb{R}) \mid h(0) = 0 \text{ et } h'(1) = 0\}$

Montrons l'inclusion réciproque.

Soit $h \in C^2([0,1],\mathbb{R})$ telle que $h(0) = 0$ et $h'(1) = 0$

posons $f = -h''$

on a bien $f \in E$

$G(f)(x) = -G(h'')(x) = -\int_0^x t\, h''(t)\,dt - x\int_x^1 h''(t)\,dt$

IPP $\quad u = t \quad u' = 1$

$\quad v' = h'' \quad v = h'$

$G(f)(x) = -[t h'(t)]_0^x + \int_0^x h'(t)\,dt - x\int_x^1 h''(t)\,dt$

$= -x h'(x) + h(x) - h(0) - x(h'(1) - h'(x))$

$G(f)(x) = h(x)$ car $h(0)=0$ et $h'(1)=0$

donc $h = G(f)$ donc $h \in \mathrm{Im}\, G$

$\mathrm{Im}\, G = \{ h \in C^2([0,1],\mathbb{R}) \mid h(0)=0 \text{ et } h'(1)=0 \}$

---

3) on sait que $\mathrm{Ker}\, G = \{0\}$ donc 0 n'est pas valeur propre de G.

on cherche $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $\exists f \in E,\ f \neq 0,\ G(f) = \lambda f$

$f \in \mathrm{Im}\, G$ donc f est de classe C^2, $f(0)=0$, $f'(1)=0$

et $G(f)'' = \lambda f'' = -f$

$f'' + \frac{1}{\lambda} f = 0$

1er cas : $\lambda < 0$ $\quad \forall x \in [0,1]$ $f(x) = A\, ch(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} x) + B\, sh(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} x)$

$f(0) = 0 \rightarrow A = 0$ $\qquad f'(x) = \frac{B}{\sqrt{-\lambda}} ch(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}} x)$

$f'(1) = 0 \rightarrow B = 0$ car $ch(\frac{1}{\sqrt{-\lambda}}) > 0$

donc $f = 0$ pas possible.

donc $\lambda < 0$ n'est pas valeur propre de G

2ème cas : $\lambda > 0$ $\quad \forall x \in [0,1]$ $f(x) = A \cos(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} x) + B \sin(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} x)$

$f(0) = 0 \Rightarrow A = 0$ $\qquad f'(x) = -\frac{B}{\sqrt{\lambda}} \cos(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} x)$

$f'(1) = 0 \Rightarrow \cos(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) = 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{(\frac{\pi}{2} + k\pi)^2}$ et $f(x) = \lambda \sin((\frac{\pi}{2} + k\pi) x)$

donc $Sp(G) = \left\{ \frac{1}{(\frac{\pi}{2} + k\pi)^2} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ (vérifier que $G(f) = \lambda f$)

---

et $E_{\frac{1}{(\frac{\pi}{2}+k\pi)^2}} = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto \sin((\frac{\pi}{2} + k\pi) x))$

---

(35) Mines Telecom

E euclidien de dim n. $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$u^2 = -Id_E$ et $\forall x \in E \setminus \{0\}$ $(u(x)|x) = 0$

$U = Mat_B(u)$ B bon.

1) mq n est pair. $p = n/2$

2) mq $\forall x \in E \setminus \{0\}$ $(u(x), x)$ libre

3) U antisym. $\Rightarrow$ u est une isométrie.

4) U $\perp$ semblable à $\begin{pmatrix} A & & \\ & \ddots & \\ & & A \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

---

1) $P = X^2 + 1$ est annulateur de u

u est diag sur $\mathbb{C}$ et $Sp(u) \subset \{i, -i\}$

i et $-i$ ont le m ordre de mult donc n est pair.

2) $(u(x), x)$ est orthogonale.

si $x \neq 0$ $u(x) \neq 0$ car u est injective.

(en effet $u(x) = 0 \Rightarrow u^2(x) = 0 \Rightarrow -x = 0$)

donc $(u(x), x)$ est libre.

3) $(u(x+y)|x+y) = 0$ $\Rightarrow$ $(u(x)|y) = -(u(y)|x)$

$U = (a_{ij})$ $a_{ij} = (u(e_j)|e_i) = -(u(e_i)|e_j) = -a_{ji}$

$U^2 = -I_n$ et $U^T = -U$

$U^T U = -U^2 = I_n$ U est orthogonale donc u est une isométrie.

4) on considère $(e_1, \dots, e_p)$ famille orthonormée de E

et on considère la famille

$B' = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_p, u(e_p))$

u est une isometrie donc $u(e_1), \dots, u(e_p)$ sont unitaires.

$u(e_1), \dots, u(e_p) \in \mathrm{Vect}(e_1 \dots e_p)^\perp$

Soit $F = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ $\dim F = p$

$(u(e_1) \dots u(e_p))$ libre car u est bijective.

$u(e_1) \dots u(e_p)$ est orthonormeé.

$\dim F^\perp = p$

donc $u(e_1) \dots u(e_p)$ base de $F^\perp$

$E = F \oplus F^\perp$ donc B' est une base de E.

$$\mathrm{Mat}_{B'}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u(e_1) & u^2(e_1) & u(e_2) & u^2(e_2) \dots & u(e_p) & u^2(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & -1 & & \\ & & 1 & 0 & & \\ & & & & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ u(e_1) \\ e_2 \\ u(e_2) \\ \vdots \\ e_p \\ u(e_p) \end{array}$$

B' est une bon donc la matrice de passage est $\perp$.

corrigé $\boxed{\text{ex } 36}$ algèbre

$M \in S_n(\mathbb{R})$ $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres

$\forall i \in [\![1, n]\!]$ $m_{ii} = \lambda_i$

$M^T M = (c_{ij})$ $M^T = (m'_{ij})$ avec $m'_{ij} = m_{ji}$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m'_{ik} m_{kj} = \sum_{k=1}^{n} m_{ki} m_{kj}$$

$$\mathrm{tr}(M^T M) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (m_{ki})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (m_{ii})^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (m_{ki})^2$$

M est symétrique donc

$$\mathrm{tr}(M^T M) = \mathrm{tr}(M^2) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_{ii}^2$$

donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (m_{ki})^2 = 0$

comme tous les termes sont ≥ 0 alors tous les termes sont nuls.

donc $\forall (k, i) \in [\![1, n]\!]^2$, $k \neq i$, $(m_{ki})^2 = 0$

donc tous les termes de M qui ne sont pas sur la diagonale sont nuls

donc M est diagonale donc $\underline{M = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)}$

algèbre (en 37)

$E = \mathbb{R}_n[X] \qquad (P|Q) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)\, Q^{(k)}(0)$

1/ bilinéarité : ok, symétrie ok

$(P|P) = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(0)^2 \geq 0$

si $(P|P) = 0$ alors $\forall k \in [\![0,n]\!] \quad P^{(k)}(0) = 0$

donc 0 est racine d'ordre $n+1$ au moins

mais $\deg P \leq n$ donc $P = 0$

2/ $k \leq i \qquad (X^i)^{(k)} = i(i-1)\cdots(i-k+1)\, X^{i-k}$

si $k < i \qquad (X^i)^{(k)}(0) = 0$

si $k = i \qquad (X^i)^{(i)} = i!$

si $k > i \qquad (X^i)^{(k)} = 0$

pour $i < j \qquad (X^i | X^j) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{(X^i)^{(k)}(0)}_{=0 \text{ si } k \neq i} \underbrace{(X^j)^{(k)}(0)}_{=0 \text{ si } k \neq j} = 0$

donc $(1, X, \dots, X^n)$ est orthogonale donc libre et possède $n+1$ vecteurs

donc c'est une base orthogonale de E

$(X^i | X^i) = \sum_{k=0}^{n} (X^i)^{(k)}(0)$ seul le terme $k = i$ est $\neq 0$

$(X^i | X^i) = i!$ donc $\left(\frac{X^i}{\sqrt{i!}}\right)_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une bon de E

3/ $f(P) = P(1-X)$

il est clair que $f \in \mathcal{L}(E)$

$P \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow P(1-X) = 0$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(1-x) = 0$

P possède une infinité de racines donc $P = 0$

$\operatorname{Ker} f = \{0\}$ donc f est injective de E dans E

$\dim E$ est finie donc f est bijective

$f \circ f(P) = f(Q)$ avec $Q = P(1-X)$

$= Q(1-X) = P(X)$

$f \circ f = \mathrm{Id}_E$ (confirme que f est bijective)

donc $\underline{f^{-1} = f}$

$f(1) = 1$; $f(X) = 1 - X$; $f\left(\frac{X^2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-X)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^2 - 2X + 1)$

... $f\left(\frac{X^k}{\sqrt{k!}}\right) = \frac{1}{\sqrt{k!}}(1-X)^k$

on constate que $\deg f\left(\frac{X^k}{\sqrt{k!}}\right) = k$

$B' = \left(1, X, \ldots, \frac{X^k}{\sqrt{k!}}, \ldots \frac{X^n}{\sqrt{n!}}\right)$ bon de E

$$\mathrm{Mat}_{B'}(f) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & (*) & \\ & & \frac{1}{\sqrt{2}} & & \\ & & & \frac{(-1)^k}{\sqrt{k!}} & \\ & (0) & & & \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} \end{bmatrix}$$ triangulaire sup.

cette matrice n'est pas orthogonale donc f n'est pas une isométrie

cette matrice n'est pas symétrique donc f n'est pas auto-adjoint

cette matrice possède $n+1$ valeurs propres $\neq$ donc f est diagonalisable corrigé feu 38 algèbre

1) $A \in GL_n(\mathbb{R})$

$A^T A \in S_n(\mathbb{R})$ et $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $X^T A^T A X = (AX)^T A X = \|AX\|^2 \geq 0$

donc $A^T A \in S_n^+(\mathbb{R})$

de plus A est inversible donc $A^T A$ aussi donc $A^T A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

les valeurs propres de $A^T A$ sont >0

donc $tr(A^T A) > 0$ (car c'est la somme des vp de $A^T A$)

2) $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ $\exists D$ diagonale $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$

$S = P D P^T$ $D = diag(d_1, ..., d_n)$ avec $d_1 > 0, \dots d_n > 0$

posons $D' = diag(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$ alors $D'^2 = D$

et D' est symétrique donc $D = D' D'^T$

donc $S = P D' D'^T P^T = P D' (P D')^T$

posons $A = (P D')^T$ alors $S = A^T A$

D' est inversible car ses vp sont >0 et P est inversible

donc A est inversible

3) $S, S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ $tr(SS') = tr(A^T A B^T B)$

avec $S = A^T A$ $S' = B^T B$ A, B inversibles.

$tr(SS') = tr(B A^T . A B^T)$

posons $C = A B^T$ alors $tr(SS') = tr(C^T C)$

C est inversible car A et B le sont

donc d'après 1) $tr(C^T C) > 0$ donc $tr(SS') > 0$