Mebas

Ex 2 $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad p_n = P(X=n)$

$\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto -x\ln x$

1) $\varphi(x) = -x\ln x \qquad \varphi'(x) = -1-\ln x$

$\varphi'(x) \geq 0 \iff -1-\ln x \geq 0 \iff \ln x \leq -1 \iff x \leq e^{-1}$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
φ'		$+$	0	$-$	
φ	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	$-\infty$

$\varphi(e^{-1}) = -e^{-1}\ln(e^{-1}) = e^{-1}$

2) $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \qquad p_n = p(1-p)^{n-1} \quad (n \geq 1)$

$$H(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} -p(1-p)^{n-1}\ln[p(1-p)^{n-1}] = -\sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^n[\ln p + \ln(1-p)^n]$$

$$= -p\ln p \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n}_{\substack{\text{converge}\\ \text{(série géom)}}} - p\ln(1-p)\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} n(1-p)^n}_{\text{conv (d'Alembert)}}$$

posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad x \in]-1,1[$

$$H(X) = -p\ln p \frac{1}{1-(1-p)} - p\ln(1-p)\frac{1-p}{(1-(1-p))^2}$$

$$H(X) = -\ln p - \frac{p(1-p)\ln(1-p)}{p^2} = \underline{-\ln p - \frac{1-p}{p}\ln(1-p)}$$

3) Supposons que $E(X)$ existe

a) $p_n = P(X=n) \qquad \sum p_n$ converge donc $p_n \to 0$ $(n \to +\infty)$

$\varphi(p_n) = -p_n\ln p_n \qquad p_n \in]0,1[$

$0 \leq \frac{\varphi(p_n)}{\sqrt{p_n}} = -\sqrt{p_n}\ln p_n$

$-\sqrt{p_n}\ln p_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ par croissances comparées et $-\sqrt{p_n}\ln p_n \geq 0$

donc à partir d'un certain rang $\quad -\sqrt{p_n}\ln p_n \leq 1$

$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq \varphi(p_n) \leq \sqrt{p_n}.$

b) si $p_n \leq \frac{1}{n^3}$ alors $\sqrt{p_n} \leq \frac{1}{n^{3/2}} \quad \Rightarrow \varphi(p_n) \leq \frac{1}{n^{3/2}}$

et $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge

si $p_n \geq \frac{1}{n^3}$ $\quad \ln p_n \geq -3\ln n \rightarrow -\ln p_n \leq 3\ln n$

$\varphi(p_n) \leq 3 p_n \ln n \leq 3 n p_n \quad$ (car $\ln n \leq n$)

$\sum n p_n$ converge car X admet une espérance

donc dans tous les cas

$$0 \leq \varphi(p_n) \leq \underbrace{\max\left(\frac{1}{n^{3/2}}, 3 n p_n\right)}_{\text{série convergente}}.$$

c) donc $\sum \varphi(p_n)$ converge donc X admet une entropie.

probas (ex 6) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ $M = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & 0 \end{pmatrix}$ $X \perp\!\!\!\perp Y$

$X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{2})$

$Y \sim \mathcal{G}(\frac{1}{2})$

1) $\chi_A(x) = x^2 - ax + b^2$

$\Delta = a^2 - 4b^2$

si $\Delta > 0$ A possède 2 valeurs propres réelles $\neq$ donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$

si $\Delta = 0$ A possède une valeur propre double $\lambda = \frac{a}{2}$

Si A est diagonalisable alors A est semblable à $\frac{a}{2} I_2$

donc $A = \frac{a}{2} I_2 = \begin{pmatrix} a/2 & 0 \\ 0 & a/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$

$A = \frac{a}{2} I_2 \iff a = 0$ et $b = 0$

donc dans le cas $\Delta = 0$, A est diagonalisable ssi $a = b = 0$

si $\Delta < 0$ A possède 2 valeurs propres complexes, elle est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$

en résumé : A diagonalisable sur $\mathbb{R}$ $\iff \begin{cases} a^2 - 4b^2 > 0 \\ \text{ou} \\ (a,b) = (0,0) \end{cases}$

2) M est diagonalisable $\iff X^2 - 4Y^2 > 0$ ou $(X, Y) = (0,0)$

or $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $X = 0$ n'est pas possible, $Y = 0$ non plus.

de plus $X^2 - 4Y^2 > 0 \iff X^2 > 4Y^2 \iff X > 2Y$

car X et Y sont à valeurs > 0

donc M est diagonalisable $\iff X > 2Y$

$P(\text{M est diagonalisable}) = P(X > 2Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X > 2k \cap Y = k)$

(car $(Y = k)_{k \in [\![1, +\infty[\![}$ est un SCE)

$X \perp\!\!\!\perp Y$ donc $P(X > 2Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = k) P(X > 2k)$

$P(Y = k) = \frac{1}{2} (\frac{1}{2})^{k-1} = (\frac{1}{2})^k$

$P(X > 2k) = \sum_{i=2k+1}^{+\infty} P(X = i) = \sum_{i=2k+1}^{+\infty} (\frac{1}{2})^i = \frac{1}{2^{2k+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{2k}}$

donc $P(X > 2Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{2})^k (\frac{1}{2})^{2k} = \sum_{k=1}^{+\infty} (\frac{1}{2})^{3k}$

$$P(X \geq 2Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k = \frac{1}{8} \frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{7}$$

la probabilité que M soit diagonalisable est $\frac{1}{7}$

3) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad N \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$\chi_A(x) = x^2 - 3x + 1 \qquad \Delta = 9 - 4 = 5 > 0$

A est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad tr(A^n) = \lambda_1^n + \lambda_2^n \qquad \lambda_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Sous réserve d'existence

$$E(tr(A^N)) = \sum_{n=0}^{+\infty} tr(A^n)\, P(N=n) \quad \text{(formule de transfert)}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda_1^n + \lambda_2^n)\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \quad \text{converge}$$

$$= e^{-\lambda}\left(e^{\lambda\lambda_1} + e^{\lambda\lambda_2}\right) = e^{\lambda(\lambda_1-1)} + e^{\lambda(\lambda_2-1)}$$

probas (ex 7) $X_n \sim \mathcal{G}(p)$

1) si $\alpha > 1$, $\forall \omega \in \Omega$ $\frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \leq \frac{1}{n^\alpha}$ (car $X_n(\omega) \geq 1$)

donc $\sum \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ converge donc $\Omega \subset A$ donc $A = \Omega$

donc $\underline{P(A) = 1}$

2) $\alpha \in]0,1[$ $\beta = 1-\alpha$

$$P(X_n > n^\beta) = \sum_{k > n^\beta}^{+\infty} P(X_n = k) = \sum_{k>n^\beta}^{+\infty} p q^{k-1} = p \sum_{k=\lfloor n^\beta \rfloor + 1} q^{k-1} = p \frac{q^{\lfloor n^\beta \rfloor}}{1-q}$$

$$P(X_n > n^\beta) = q^{\lfloor n^\beta \rfloor} \leq q^{n^\beta - 1} \quad \text{car } q<1 \quad (n^\beta - 1 \leq \lfloor n^\beta \rfloor)$$

donc $P(\bigcup_{n=k}^{+\infty} X_n > n^\beta) \leq \sum_{n=k}^{+\infty} P(X_n > n^\beta) \leq \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n^\beta - 1}$

3) $\beta < 1$

$$q^{n^\beta - 1} = e^{(n^\beta - 1)\ln q}$$

$$n^\gamma q^{n^\beta - 1} = e^{\gamma \ln n + (n^\beta - 1)\ln q}$$

$\gamma \ln n + (n^\beta - 1)\ln q \sim \underbrace{(n^\beta - 1)\ln q}_{\substack{\to -\infty \\ (n\to+\infty)}}$ car $|\ln n| << |(n^\beta - 1)\ln q|$

donc $n^\gamma q^{n^\beta - 1} \to 0$ $(n \to +\infty)$ $q^{n^\beta - 1} = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ avec $\gamma > 1$

donc $\sum q^{n^\beta - 1}$ converge

donc $\sum_{n=k}^{+\infty} q^{n^\beta - 1} \to 0$ $(k \to +\infty)$ (reste d'une série convergente)

donc $P(\bigcup_{n=k}^{+\infty} X_n > n^\beta) \to 0$ $(k \to +\infty)$

4) posons $B_k = \bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^\beta)$

$B_{k+1} \subset B_k$ donc par continuité décroissante

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k\right) = \lim_{k\to+\infty} P(B_k) = 0$$

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^\beta)\right) = 0$$

5) $A_\beta = \{\omega \in \Omega,\ \exists k \in \mathbb{N},\ \forall n \geq k\ X_n(\omega) \leq n^\beta\}$.

$$= \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} (X_n \leq n^\beta)$$

$$P(\bar{A}_\beta) = P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^\beta)\right) = 0$$

donc $P(A_\beta) = 1$

6) si $\omega \in A_\beta$ alors $\exists k \in \mathbb{N},\ \forall n \geq k\ \ X_n(\omega) \leq n^\beta$

$$\frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \geq \frac{1}{n^\alpha n^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha+\beta}} = \frac{1}{n}$$

donc $\sum \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ diverge.

7) $(A_\beta, \bar{A}_\beta)$ est un SCE

$$P(A) = P(A_\beta)\, P_{A_\beta}(A) + P(\bar{A}_\beta)\, P_{\bar{A}_\beta}(A)$$

$P_{A_\beta}(A) = 0$ car si $\omega \in A_\beta$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ diverge

$P(\bar{A}_\beta) = 0$ donc $\underline{P(A) = 0}$

probas (ex 8)

P_k = faire pile au kième lancer
F_k = — face —

1) $N_n(\Omega) = [\![1,n]\!]$

$$P(N_n=1) = P(P_1\cap\dots\cap P_n) + P(F_1\cap\dots\cap F_n) = \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$P(N_n=n) = P(P_1\cap F_2\cap P_3\cap\dots) + P(F_1\cap P_2\cap F_3\cap\dots) = \frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

2) $(N_{n-1}=i)_{i\in[\![1,n-1]\!]}$ est un SCE

$$P(N_n=k) = \sum_{i=1}^{n-1} P(N_{n-1}=i)\, P_{N_{n-1}=i}(N_n=k)$$

pour $i>k$ $\quad P_{N_{n-1}=i}(N_n=k)=0$

$P_{N_{n-1}=k}(N_n=k)=\frac{1}{2}$ (on obtient le même résultat au rang n et au rang n-1)

$P_{N_{n-1}=k-1}(N_n=k)=\frac{1}{2}$ (on obtient un résultat ≠ au rang n et au rang n-1)

$P_{N_{n-1}=i}(N_n=k)=0$ pour $i\neq k$ et $i\neq k-1$

$$P(N_n=k) = P(N_{n-1}=k-1)\times\frac{1}{2} + P(N_{n-1}=k)\times\frac{1}{2}$$

on pose $a_n(k) = P(N_n=k)$

on a donc $\underline{a_n(k) = a_{n-1}(k-1)\times\frac{1}{2} + a_{n-1}(k)\times\frac{1}{2}}$ $\quad n\geq 2$, $k\geq 2$

3) $G_{N_n}(t) = \sum_{k=1}^{n} P(N_n=k)t^k = \sum_{k=1}^{n} a_n(k)t^k \quad (\forall t\in\mathbb{R})$

pour $n\geq 3$

$$= P(N_n=1)t + P(N_n=n)t^n + \sum_{k=2}^{n-1} a_n(k)t^k$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}t + \frac{1}{2^{n-1}}t^n + \sum_{k=2}^{n-1} a_{n-1}(k-1)\cdot\frac{1}{2}t^k + a_{n-1}(k)\frac{1}{2}t^k$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}t + \frac{1}{2^{n-1}}t^n + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-2} a_{n-1}(k)t^{k+1} + \sum_{k=2}^{n-1} a_{n-1}(k)t^k\cdot\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}}t + \frac{1}{2^{n-1}}t^n + \frac{1}{2}\left(tG_{N_{n-1}}(t) - P(N_{n-1}=n-1)t^n\right)$$

$$+\frac{1}{2}\left(G_{N_{n-1}}(t) - P(N_{n-1}=1)t\right)$$

$$G_{N_n}(t) = \frac{1}{2}(t+1)\,G_{N_{n-1}}(t) + \frac{1}{2^{n-1}}t + \frac{1}{2^{n-1}}t^n - \frac{1}{2^{n-1}}t^n - \frac{1}{2^{n-1}}t$$

$$G_{N_n}(t) = \frac{1}{2}(t+1)\,G_{N_{n-1}}(t)$$

---

donc par récurrence $\quad G_{N_n}(t) = \left[\frac{1}{2}(t+1)\right]^{n-1} G_{N_1}(t)$

$N_1(\Omega) = \{1\}$

$P(N_1 = 1) = 1 \qquad G_{N_1}(t) = t$

$$G_{N_n}(t) = \frac{1}{2^{n-1}}(t+1)^{n-1}\,t \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

G_{N_n} dérivable sur $\mathbb{R}$

$$G'_{N_n}(t) = \frac{1}{2^{n-1}}\left[(n-1)(t+1)^{n-2}\,t + (t+1)^{n-1}\right]$$

$$E(N_n) = G'_{N_n}(1) = \frac{1}{2^{n-1}}\left[(n-1)\,2^{n-2} + 2^{n-1}\right]$$

$$= \frac{n-1}{2} + 1 = \underline{\frac{n+1}{2}}$$

probas (ex 10)

1) $k \leq n-1$ $\quad S_n - S_k = X_{k+1} + \dots + X_n$ fonction de $X_{k+1}, \dots, X_n$

$S_k I_{A_k}$ est fonction de $X_1, \dots, X_k$

donc d'après le lemme des coalitions $S_n - S_k \perp\!\!\!\perp S_k I_{A_k}$

[Rappel si $\omega \in A_k$, $I_{A_k} = 1$

si $\omega \notin A_k$, $I_{A_k} = 0$]

2) remarquons que les A_k sont 2 à 2 disjoints

en effet soient k, k' tq $k < k'$

Si A_k est réalisé $|S_k| \geq \varepsilon$

Si $A_{k'}$ est réalisé $|S_k| < \varepsilon$ car $k < k'$ donc $A_k \cap A_{k'} = \phi$

(autrement dit, si $\omega \in A_k \cap A_{k'}$, $|S_k(\omega)| \geq \varepsilon$ et $|S_k(\omega)| < \varepsilon$ impossible)

posons $Y_n = \sum_{k=1}^{n} I_{A_k}$

au plus l'un des A_k est réalisé pour $k \in [\![1, n]\!]$

donc $Y_n = 0$ ou 1 $\quad Y_n(\Omega) = \{0, 1\}$.

en particulier $0 \leq Y_n \leq 1$

$\sum_{k=1}^{n} E(S_n^2 I_{A_k}) = E(S_n^2 Y_n)$ par linéarité de l'espérance

$0 \leq Y_n \leq 1$ donc $0 \leq S_n^2 Y_n \leq S_n^2$

donc $E(S_n^2 Y_n) \leq E(S_n^2)$ par croissance de l'espérance.

donc $\underline{\sum_{k=1}^{n} E(S_n^2 I_{A_k}) \leq E(S_n^2)}$

3) $E((S_n - S_k) S_k I_{A_k}) = E(S_n - S_k) E(S_k I_{A_k})$ $\quad (k \leq n-1)$

car $S_n - S_k \perp\!\!\!\perp S_k I_{A_k}$

et $E(S_n) = 0$ donc

$E(S_n - S_k) = 0$

donc $E(S_n S_k I_{A_k}) = E(S_k^2 I_{A_k})$ $\quad (k \leq n-1)$

mais aussi pour $k = n$

d'après Cauchy-Schwarz :

$$E(S_n S_k I_{A_k}^2)^2 \leq E(S_n^2 I_{A_k}^2)\, E(S_k^2 I_{A_k}^2)$$

$$E(S_n S_k I_{A_k})^2 \leq E(S_n^2 I_{A_k})\, E(S_k^2 I_{A_k})$$

car $I_{A_k}^2 = I_{A_k}$

donc $E(S_k^2 I_{A_k})^2 \leq E(S_n^2 I_{A_k})\, E(S_k^2 I_{A_k})$

si $E(S_k^2 I_{A_k}) \neq 0$, comme elle est ≥ 0,

on a $E(S_k^2 I_{A_k}) \leq E(S_n^2 I_{A_k})$

si $E(S_k^2 I_{A_k}) = 0$, on a bien aussi $E(S_k^2 I_{A_k}) \leq E(S_n^2 I_{A_k})$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} E(S_k^2 I_{A_k}) \leq \sum_{k=1}^{n} E(S_n^2 I_{A_k}) \leq E(S_n^2)$

---

4) Montrons que $(\underset{k\in[\![1,n]\!]}{\mathrm{Max}} |S_k| \geq \varepsilon) = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$

Si l'un des A_k est réalisé alors $|S_k| \geq \varepsilon$

donc $\underset{k\in[\![1,n]\!]}{\mathrm{Max}} |S_k| \geq \varepsilon$ donc $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subset (\underset{k\in[\![1,n]\!]}{\mathrm{Max}} |S_k| \geq \varepsilon)$

réciproquement, si $\underset{k\in[\![1,n]\!]}{\mathrm{Max}} |S_k| \geq \varepsilon$

alors $\exists k \in [\![1,n]\!], |S_k| \geq \varepsilon$

Soit k_0 le plus petit entier tel que $|S_k| \geq \varepsilon$

si $k_0 = 1$ alors $|S_1| \geq \varepsilon$ donc A_1 est réalisé donc $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ est réalisé

si $k_0 \geq 2$ $|S_{k_0}| \geq \varepsilon$ et $\forall j \leq k_0 - 1$, $|S_j| < \varepsilon$

donc A_{k_0} est réalisé donc $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ est réalisé

donc

$$(\underset{k\in[\![1,n]\!]}{\mathrm{Max}} |S_k| \geq \varepsilon) = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

$$P\left(\underset{k\in[\![1,n]\!]}{\mathrm{Max}}|S_k|\geq \varepsilon\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

(union disjointe)

or $A_k \subset |S_k| \geq \varepsilon$ donc $A_k \subset (S_k^2 I_{A_k} \geq \varepsilon^2)$

donc $P(A_k) \leq P(S_k^2 I_{A_k} \geq \varepsilon^2) \leq \dfrac{E(S_k^2 I_{A_k})}{\varepsilon^2}$

(Markov)

$$\sum_{k=1}^{n} P(A_k) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{n} E(S_k^2 I_{A_k}) \leq \frac{E(S_n^2)}{\varepsilon^2} = \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} V(X_i)}{\varepsilon^2}$$

(les X_i sont $\perp\!\!\!\perp$)

d'où

$$\underline{P\left(\underset{k\in[\![1,n]\!]}{\mathrm{Max}}|S_k|\geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} V(X_i)}{\varepsilon^2}}$$

probas (ex 13)

$X \perp\!\!\!\perp Y$ à valeurs dans $\mathbb{N}$

$\forall k \in \mathbb{N}$ $P(X=k) = P(Y=k) = \dfrac{1+a^k}{4\,k!}$

déterminer a, calculer $E(X)$, loi de $X+Y$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1+a^k}{4k!} = 1 \qquad \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k}{k!} = 1$$

$$\frac{1}{4}e + \frac{1}{4}e^a = 1 \qquad e + e^a = 4$$

$$e^a = 4 - e$$

$$a = \ln(4-e)$$

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1+a^k}{4k!} t^k = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^k}{k!} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{a^k t^k}{k!}$$

$$= \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{at}$$

$$G'_X(t) = \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}a e^{at}$$

$$G'_X(1) = E(X) = \frac{1}{4}e + \frac{1}{4}a e^a = \frac{1}{4}e + \frac{1}{4}\ln(4-e)(4-e)$$

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)\,G_Y(t) = (G_X(t))^2 = \left(\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{at}\right)^2$$

$$= \frac{1}{16}e^{2t} + \frac{1}{16}e^{2at} + \frac{1}{8}e^{t+at}$$

$$= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k t^k}{k!} + \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k a^k t^k}{k!} + \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(1+a)^k}{k!}t^k$$

$$P(X+Y=k) = \frac{1}{16}\frac{2^k}{k!} + \frac{1}{16}\frac{2^k a^k}{k!} + \frac{1}{8}\frac{(1+a)^k}{k!}$$

probas (ex 14)

1) $R=1$ et $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$

(formule du binôme inversé : dériver k fois $\sum_{n\geq 0}^{+\infty} x^n$)

2) $T(\Omega)=\mathbb{N}^*$ R_k = tirer une boule rouge au kième tirage

$P(T=k)=P(\overline{R_1}\cap\ldots\cap\overline{R_{k-1}}\cap R_k) = \underbrace{\frac{n-1}{n}\times\ldots\times\frac{n-1}{n}}_{k-1 \text{ fois}}\times\frac{1}{n} = \frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$

3) pour $i\in\mathbb{N}^*$, $i\leq k-1$

$P_{T=k}(X=i) = \binom{k-1}{i}\left(\frac{b}{n-1}\right)^i\left(\frac{n-b-1}{n-1}\right)^{k-i-1}$

en effet, si on sait que $T=k$, le kième tirage comporte la boule rouge. Sur les $k-1$ premiers tirages, on doit placer i boules blanches et $k-i-1$ boules noires

$\binom{k-1}{i}$ est le placement des i boules blanches.

$\left(\frac{b}{n-1}\right)^i$ = proba d'avoir i boules blanches

$\left(\frac{n-b-1}{n-1}\right)^{k-i-1}$ = proba d'avoir $k-i-1$ boules noires.

et si $i\geq k$ alors $P_{T=k}(X=i)=0$

4)

donc pour $i\in\mathbb{N}$ $p=\frac{b}{n-1}$

$$P(X=i) = \sum_{k=i+1}^{+\infty} P_{T=k}(X=i)\,P(T=k) = \sum_{k=i+1}^{+\infty}\binom{k-1}{i}p^i(1-p)^{k-i-1}\frac{(n-1)^{k-1}}{n^k}$$

$$P(X=i) = \sum_{k=i}^{+\infty}\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i}\left(\frac{n-1}{n}\right)^k\cdot\frac{1}{n}$$

$$P(X=i) = \frac{p^i}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^i\sum_{k=i}^{+\infty}\binom{k}{i}(1-p)^{k-i}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-i}$$

$$= \frac{p^i}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^i\frac{1}{\left[1-\frac{(1-p)(n-1)}{n}\right]^{i+1}}$$

(d'après 1))

$$P(X=i) = \frac{p^i(n-1)^i}{[n-(1-p)(n-1)]^{i+1}} = \frac{p^i(n-1)^i}{[1+p(n-1)]^{i+1}}$$

posons $K = \frac{p(n-1)}{1+p(n-1)} \in]0,1[$ $\quad 1-K = \frac{1}{1+p(n-1)}$

$P(X=i) = K^i(1-K)$ $\quad i \in \mathbb{N}$ $\quad (X(\Omega) = \mathbb{N})$

posons $Y = X+1$ $\quad P(Y=j) = P(X=j-1) = K^{j-1}(1-K)$

pour $j \in \mathbb{N}^*$

$Y \sim \mathcal{G}(1-K)$

$E(X) = E(Y)$ et $V(X) = V(Y)$

espérance et variance d'une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{1+p(n-1)}$