

probas (en 15)

1) il y a n boules blanches dans l'urne au 1^{er} tirage

$$X_1(\Omega) = \Omega \quad P(X_1 = n) = 1$$

$$X_2(\Omega) = \{n, n-1\}$$

R_k = tirer une boule rouge au k i^{ème} tirage

B_k = _____ blanche _____

$$P(X_2 = n) = P(R_1) = \frac{1}{2}$$

$$P(X_2 = n-1) = P(B_1) = \frac{1}{2}$$

2) $X_{p+1} = k$: il y a k boules blanches au tirage $p+1$
(en p tirages)

$$(X_p = i)_{i \in \{0, \dots, n\}} \text{ est un SCE}$$

$$P(X_{p+1} = k) = \sum_{i=0}^n P(X_p = i) P(X_{p+1} = k | X_p = i)$$

$$P(X_{p+1} = k | X_p = i) = 0 \text{ pour } i \neq k \text{ et } i \neq k+1$$

$$P(X_{p+1} = k) = P(X_p = k) P(X_{p+1} = k | X_p = k) + P(X_p = k+1) P(X_{p+1} = k | X_p = k+1)$$

Si $X_p = k$, il y a k boules blanches au tirage p

donc la probabilité que'il y en ait k au tirage $p+1$

est la proba d'avoir tiré une boule rouge au tirage p .

$$P(X_{p+1} = k | X_p = k) = \frac{2n-k}{2n}$$

Si $X_p = k+1$, la proba que'il y ait une boule blanche de moins au tirage $p+1$ est la proba d'avoir tiré une boule blanche au tirage p .

$$P(X_{p+1} = k | X_p = k+1) = \frac{k+1}{2n}$$

$$\text{donc } P(X_{p+1} = k) = \frac{2n-k}{2n} P(X_p = k) + \frac{k+1}{2n} P(X_p = k+1)$$

3) X_p est à valeurs finies donc G_p est polynomiale

$$G_{p+1}(t) = \sum_{k=0}^m P(X_{p+1}=k) t^k = \sum_{k=0}^m \frac{2^{m-k}}{2^n} P(X_p=k) t^k \\ + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{k+1}{2^n} P(X_p=k+1) t^k$$

(en effet $P(X_p = m+1) = 0$)

$$G_{p+1}(t) = \sum_{k=0}^m P(X_p=k) t^k - \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^m k P(X_p=k) t^k \\ + \sum_{k=1}^m \frac{k}{2^n} P(X_p=k) t^{k-1}$$

$$G_{p+1}(t) = \sum_{k=0}^m P(X_p=k) t^k - \frac{1}{2^n} t \sum_{k=1}^m k P(X_p=k) t^{k-1} \\ + \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^m k P(X_p=k) t^{k-1}$$

$$G_{p+1}(t) = G_p(t) + \frac{1}{2^n} (1-t) G'_p(t)$$

4) G_p et G_{p+1} sont dérivables

$$G'_{p+1}(t) = G'_p(t) + \frac{1}{2^n} (-1) G'_p(t) + \frac{1}{2^n} (1-t) G''_p(t)$$

en $t=1$:

$$E(X_{p+1}) = E(X_p) - \frac{1}{2^n} E(X_p) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) E(X_p)$$

$$\text{donc } E(X_p) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{p-1} E(X_1)$$

$$\underline{E(X_p) = \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^{p-1} \times n \rightarrow 0 \quad (p \rightarrow \infty)}$$

X, Y II de m. l'oi à valeurs dans $\mathbb{N}$, espérance et variance finie
 on suppose que $X+Y+1 \sim \mathcal{U}_g(p)$
 déterminer $E(X), V(X), G_X$, loi de X

on note $Z = X+Y+1$ $Z \sim \mathcal{U}_g(p)$
 $E(X)$ et $E(Y)$ sont finies donc $E(Z)$ aussi
 $E(Z) = 2E(X)+1 = \frac{1}{p}$
 $E(X) = (\frac{1}{p} - 1)\frac{1}{2}$

$$E(\mathcal{U}_g(p)) = \frac{1}{p}$$

$$V(\mathcal{U}_g(p)) = \frac{g}{p^2}$$

toute VA est II avec $T=1$

$$P(X=m, T=1) = P(X=m \cap T=1)$$

$$= P(X=m \cap \bar{Z})$$

$$= P(X=m) = P(X=m)P(T=1)$$

$$V(Z) = V(X+Y) + V(1)$$

$$= V(X) + V(Y) + 1$$

$$= 2V(X) + 1 = \frac{g}{p^2}$$

$$V(X) = (\frac{g}{p^2} - 1)\frac{1}{2}$$

$$G_1 | H = t$$

$$G_Z(H) = G_X(H) G_Y(H) G_1(H)$$

$$\frac{pt}{1-qt} = (G_X(H))^2 t$$

par $t \neq 0$ $(G_X(H))^2 = \frac{p}{1-qt}$ $|H| \leq \frac{1}{g}$

$$G_X | H = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n$$

par $t \geq 0$ $G_X | H \geq 0$

$$G_X | H = \sqrt{\frac{p}{1-qt}} = \sqrt{p} (1-qt)^{-1/2}$$

(par continuité en 0, on ne peut pas avoir $G_X | H = \sqrt{\frac{p}{1-qt}}$
 par certaines valeurs de t et $-\sqrt{\frac{p}{1-qt}}$ par d'autres).

on peut un DSE de G_x

$$(1+u)^d = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(d-1)\dots(d-n+1)}{n!} u^n$$

$$(1-qt)^{-1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)\dots(-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} t^n q^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^n n!} t^n q^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} t^n q^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} t^n q^n$$

$$P(X=n) = \sqrt{p} q^n \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

probas CCINP 2024 (en 18)

$X \sim P(\lambda)$ la loi conditionnelle de Y sachant $X=n$ est une binomiale de paramètres n, p .

1) loi de Y

2) X et $Y \perp$?

3) loi de $X-Y$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(Y=k) = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad k \leq n.$$

$$\begin{aligned} 1) \quad P(Y=k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(X=n) P(Y=k | X=n) & Y|X=N \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} p^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} p^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{m+k}}{m!} (1-p)^m \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} p^k \lambda^k \frac{(1-p)^{-1}}{e} = \frac{(p\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda p} \end{aligned}$$

$$\underline{Y \sim P(\lambda p)}$$

$$2) \text{ non } P(X=0, Y=1) = P(X=0) \underbrace{P(Y=1)}_{\substack{X=0 \\ =0}} = 0$$

$$\text{et } P(X=0) P(Y=1) \neq 0$$

$$3) Z = X - Y$$

$$\text{à priori } Z(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}$$

→

mais si $z \in \mathbb{Z}^{-}$

$$P(Z=z) = P(X-Y=z) = P(X=Y+z) = P(Y=X-z)$$

$$\text{si } z \in \mathbb{Z}^{-} \quad -z > 0 \quad X-z > X$$

$$Y = X-z \Rightarrow Y > X$$

$$0 \leq P(Y=X-z) \leq P(Y > X) = 0$$

$$P(Z=z) = 0$$

donc on peut considérer que $Z \in \mathbb{N}$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P(Z=k) = P(Y=X-k)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} P(X=n) P(Y=n-k)$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{n-k} p^{n-k} (1-p)^k$$

$$= \sum_{n=k}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{k!(n-k)!} p^{n-k} (1-p)^k$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(1-p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} p^{n-k}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(1-p)^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+k}}{n!} p^n$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(1-p)^k \lambda^k}{k!} e^{\lambda p} = \frac{((1-p)\lambda)^k}{k!} e^{-\lambda(1-p)}$$

$$Z \sim P(k-p\lambda)$$

probas (en 19)

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2 \quad P(X=i, Y=j) = \alpha q^{i+j}$$

$$\begin{aligned} 1) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P(X=i, Y=j) &= 1 = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} q^{i+j} \\ &= \alpha \left(\sum_{i=0}^{\infty} q^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} q^j \right) = \frac{\alpha}{(1-q)^2} = \frac{\alpha}{p^2} \\ &\Rightarrow \alpha = p^2 \end{aligned}$$

$$2) P(X=i) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha q^{i+j} = \alpha q^i \frac{1}{1-q} = p^2 \frac{q^i}{p} = p q^i$$

$$P(Y=j) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha q^{i+j} = p q^j$$

on peut remarquer que $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i) P(Y=j)$$

donc $X \perp Y$. et remarquons que $X \sim Y$.

$$3) Z = X+1 \quad Z(\Omega) = \mathbb{N}^+$$

$$P(Z=k) = P(X=k-1) = p(1-p)^{k-1} \quad \text{donc } Z \sim \mathcal{G}(p)$$

$$E(Z) = E(X) \quad \text{et } V(Z) = V(X)$$

espérance et variance d'une loi géométrique.

$$4) \text{Cov}(X, Y) = 0 \quad \text{car } X \perp Y$$

$$5) \text{posons } T = \max(X, Y) \quad T(\Omega) = \mathbb{N}$$

$$P(T \leq n) = P(X \leq n \cap Y \leq n) = P(X \leq n) P(Y \leq n) = (P(X \leq n))^2$$

$$P(X \leq n) = \sum_{k=0}^n P(X=k) = \sum_{k=0}^n p q^k = p \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1-q^{n+1}$$

$$P(T \leq n) = (1-q^{n+1})^2$$

$$P(T=n) = P(T \leq n) - P(T \leq n-1) = (1-q^{n+1})^2 - (1-q^n)^2$$

probas (en 20)

1) $S_n \sim B(n, p)$

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) P(S_n = k) \quad (\text{formule de transfert})$$

$$E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

2) inégalité de TL - $M = \sup_{t \in (0,1)} |f''(t)|$

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(p) \right| = \left| \left(\frac{k}{n} - p\right) f'(p) \right| \leq \frac{\left(\frac{k}{n} - p\right)^2}{2} \sup_{t \in \left(p, \frac{k}{n}\right)} |f''(t)| \leq M \frac{\left(\frac{k}{n} - p\right)^2}{2}$$

on multiplie par $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

et on fait la somme. On utilise aussi l'inégalité triangulaire par $\sum$.

$$\begin{aligned} & \left| E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - \sum_{k=0}^n f(p) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - p\right) f'(p) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right| \\ & \leq \sum | \dots | \leq \frac{M}{2} \underbrace{\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - p\right)^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{R_n}. \end{aligned}$$

détaillons le terme $\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - p\right) f'(p) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

il y a un terme égal à $-p f'(p)$

et un terme $\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} f'(p) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = A_n$.

$$\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} \Rightarrow A_n = f'(p) \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$A_n = f'(p) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^{k+1} (1-p)^{n-1-k} = p f'(p) (p + 1-p)^{n-1} = p f'(p)$$

terme qui s'annule avec $-p f'(p)$

d'où

$$\left| E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - f(p) \right| \leq \frac{M}{2} R_n$$

Montrons que $R_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$)

$$R_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - p\right)^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} - 2p \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{= p \text{ (voir calcul précédent)}} + \underbrace{\sum_{k=0}^n p^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{= p^2}$$

$$R_n = B_n - 2p^2 + p^2 \quad \text{avec} \quad B_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$R_n = B_n - p^2$$

$$B_n = \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} + \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}_{= \frac{1}{n} p}$$

$$k(k-1) \binom{n}{k} = \frac{k(k-1) n!}{k! (n-k)!} = \frac{n(n-1) (n-2)!}{(k-2)! (n-2-(k-2))!} = \frac{n(n-1) \binom{n-2}{k-2}}{(k-2)! (n-2-(k-2))!}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{n^2} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} &= \frac{n(n-1)}{n^2} \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \frac{n-1}{n} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^{k+2} (1-p)^{n-k-2} = \frac{n-1}{n} p^2 (p + 1-p)^{n-2} \end{aligned}$$

d'où $B_n = \frac{n-1}{n} p^2 + \frac{1}{n} p$

$$R_n = \frac{n-1}{n} p^2 + \frac{1}{n} p - p^2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

donc $\underbrace{E\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) \rightarrow f(p)}_{(n \rightarrow \infty)}$

probas en 2.1

$$\mathcal{P}([1, n]) \times \mathcal{P}([1, n])$$

événement

C = avoir un couple (A, B)

td $A \cap B = \emptyset$?

nb de couples (A, B) ?

$$2^n \times 2^n = 4^n.$$

nb de couples (A, B) disjoints ?

on fixe A le card de A .

$\binom{n}{k}$ choix des él^{ts} de A

2^{n-k} choix des él^{ts} de B

(disjoint de A)

(on enlève les él^{ts} de A)

et on prend n'importe quelle

partie de $\mathcal{P}([1, n]) \setminus A$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n.$$

réponse : $P(C) = \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n.$

montrer en 22'

$$1) B_{p+1} \subset B_p \text{ et } \bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} B_p = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_k$$

$$P(\bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} A_k) = P(\bigcap_{p \in \mathbb{N}^*} B_p) = \lim_{p \rightarrow \infty} P(B_p) \quad (\text{continuité } \downarrow).$$

$$P(B_p) = P(A_1 \cap \dots \cap A_p)$$

$$A_1 = "X_1 X_2 = 0" \quad A_2 = "X_3 X_4 = 0", \dots$$

$A_1, A_2, \dots, A_p$ sont $\perp$ (lemme des coalitions)

$$P(B_p) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_p)$$

$$P(\bar{A}_1) = P(X_1 X_2 \neq 0) = P(X_1 \neq 0 \cap X_2 \neq 0) = P(X_1 \neq 0) P(X_2 \neq 0)$$

$$P(\bar{A}_1) = \frac{4}{9} \rightarrow P(A_1) = \frac{5}{9}$$

$$P(B_p) = \left(\frac{5}{9}\right)^p \quad \lim_{p \rightarrow \infty} P(B_p) = 0 \quad \text{donc } P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 0$$

$$\text{donc } P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{A}_k\right) = 1$$

$$P(T = +\infty) = P\left(\bigcap_{k \geq 2} \bar{C}_k\right) \quad \text{avec } C_k = "X_{k-1} = X_k = 1"$$

$$\bar{C}_k = "X_{k-1} = 0" \cup "X_k = 0"$$

$$\bar{C}_k = "X_{k-1} X_k = 0"$$

$$\bigcap_{k \geq 2} \bar{C}_k \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$0 \leq P\left(\bigcap_{k \geq 2} \bar{C}_k\right) \leq P\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = 0$$

$$\text{donc } P(T = +\infty) = 0 \quad \text{donc } \underline{P(T \in \mathbb{N}) = 1}$$

$$2) S \in E \quad (X_1 = 0; X_1 = 1 \cap X_2 = 0; X_1 = 1 \cap X_2 = 1)$$

$$P(T = n) = P(X_1 = 0) P_{X_1=0}(T=n) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) P_{X_1=1, X_2=0}(T=n) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) P_{X_1=1, X_2=1}(T=n)$$

$$P(T=n) = P(T=n-1) \quad X_1=0$$

on peut considérer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ modélise une série d'expériences aléatoires de type succès-échec indépendantes (dont la proba de succès est $2/3$)

T représente alors le rang d'apparition du 2^{ème} succès consécutif

Si on sait que $X_1=0$, on a commencé par un échec,

$T=n$ représente alors le rang d'apparition du 2^{ème} succès consécutif en $n-1$ expériences.

$$\text{d'où } P(T=n) = P(T=n-1) \quad X_1=0$$

Si on sait que $X_1=1 \wedge X_2=0$

alors $T=n$ représente le rang d'apparition du 2^{ème} succès consécutif en $n-2$ expériences.

$$\text{d'où } P(T=n) = P(T=n-2) \quad X_1=1 \wedge X_2=0$$

Si on sait que $X_1=1 \wedge X_2=1$, alors $T=2$

$$\text{d'où } P(T=n) = 0 \quad \text{pour } n \geq 3. \quad X_1=1 \wedge X_2=1$$

on a alors

$$P(T=n) = \frac{1}{3} P(T=n-1) + \frac{2}{9} P(T=n-2) \quad (n \geq 4)$$

$$3) G_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(T=n) t^n \quad t \in]-R, R[\quad R \text{ rayon de conv}$$

$$P(T=0) = P(T=1) = 0$$

$$G_T(t) = P(T=2)t^2 + P(T=3)t^3 + \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{3} P(T=n-1) + \frac{2}{9} P(T=n-2) \right) t^n$$

$$P(T=2) = P(X_1=X_2=1) = \frac{4}{9}$$

$$P(T=3) = P(X_1=0 \wedge X_2=1 \wedge X_3=1) = \frac{4}{27}$$

remarquons que la formule (10) est valable pour $n=3$.

$$G_T(t) = P(T=2)t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{3} P(T=n-1)t^n + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{9} P(T=n-2)t^n$$

$$G_T(t) = \frac{4}{9}t^2 + \frac{1}{3} \sum_{n=2}^{\infty} P(T=n)t^{n+1} + \frac{2}{9} \sum_{n=1}^{\infty} P(T=n)t^{2+n}$$

$$G_T(t) = \frac{4}{9}t^2 + \frac{1}{3}t G_T(t) + \frac{2}{9}t^2 G_T(t)$$

$$G_T(t) \left(1 - \frac{1}{3}t - \frac{2}{9}t^2\right) = \frac{4}{9}t^2$$

$$G_T(t) = \frac{\frac{4}{9}t^2}{1 - \frac{1}{3}t - \frac{2}{9}t^2}$$

par t tel que $1 - \frac{1}{3}t - \frac{2}{9}t^2 \neq 0$

$t \neq t_1$ et $t \neq t_2$ à déterminer

G_T est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{t_1, t_2\}$ (on a bien $G_T(1)=1$)

$$G'_T(t) = \frac{\frac{4}{9} \cdot 2t \left(1 - \frac{1}{3}t - \frac{2}{9}t^2\right) - t^2 \left(-\frac{1}{3} - \frac{4}{9}t\right)}{\left(1 - \frac{1}{3}t - \frac{2}{9}t^2\right)^2}$$

G_T dérivable en 1.

$$G'_T(1) = \frac{\frac{4}{9} \cdot 2 \times \frac{4}{9} + \frac{7}{9}}{\left(\frac{4}{9}\right)^2} = \frac{\frac{4}{9} \times \frac{9^2}{4^2} \times \frac{15}{9}}{\frac{15}{4}} = \underline{\underline{\frac{15}{4} = E(T)}}$$

autre méthode possible: calculer $P(T=n)$ grâce à la relation de récurrence, puis $\sum n P(T=n)$.