PC* Devoir Surveillé N°1 durée 3h30

Problème 1

I

Posons $f(t)=e^{-t}$, $g(x)=\int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t}dt$, $h(x)=\int_x^{x+1}\frac{e^{-t}}{1+t}dt$

1) Montrer que g est dérivable sur $]-1,+\infty[$, calculer g' et déterminer le tableau de variation de g

2) Déterminer un développement limité de g à l'ordre 2 en 0 . Interpréter graphiquement le résultat .

3) En encadrant $\frac{1}{1+t}$ sur $[0,+\infty[$, montrer que g est bornée sur $[0,+\infty[$ puis que g admet une limite réelle L en $+\infty$.

4) Montrer que $\forall x\in]-1,0]$ $g(x)\le \ln(1+x)$ .Déterminer $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)$.

5) Montrer que h est dérivable sur $]-1,+\infty[$, calculer h' et déterminer le tableau de variation de h

6) En encadrant e^{-t} sur $[x,x+1]$, déterminer un encadrement de h sur $]-1,+\infty[$

En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to -1^+} h(x)$.

7) En encadrant $\frac{1}{1+t}$ sur $[x,x+1]$, déterminer un encadrement de h sur $]-1,+\infty[$.

En déduire qu'il existe un réel α (et le déterminer) tel que $h(x)\sim \alpha\frac{e^{-x}}{x}$ ($x\to+\infty$)

8) En appliquant l'inégalité de Taylor Lagrange, majorer $\left|e^{-u}-1+u\right|$ pour $u\ge 0$

Appliquer cette inégalité à $u=t+1$ et en déduire un encadrement de $\frac{e^{-t-1}}{t+1}+\frac{t}{t+1}$ pour $t\in]-1,+\infty[$

En déduire un équivalent de $h(x)$ ($x\to -1^+$)

II

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $]-1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ .Pour $f\in E$,on pose $g(x)=\int_0^x\frac{f(t)}{1+t}dt$

1) Montrer que $\ln(x+1)\sim\ln(x)$ ($x\to+\infty$) et $\ln(1+\ln x)=o(\ln x)$ ($x\to+\infty$)

2) Supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

a) Montrer que f est bornée sur $[0,+\infty[$ .On note $M=\sup\limits_{t\in[0,+\infty[}|f(t)|$

b) Pour $x\ge 1$, on note $\alpha(x)=\sup\{|f(t)| \setminus \ln x\le t\le x\}$ (on rappelle que $\ln x\le x$)

Montrer $\exists t_x\in[\ln x,x]$ $\alpha(x)=|f(t_x)|$ et en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0$

c) En écrivant $g(x)=\int_0^{\ln x}\frac{f(t)}{1+t}dt+\int_{\ln x}^x\frac{f(t)}{1+t}dt$, majorer $|g(x)|$ en fonction de x , M , $\alpha(x)$

d) En déduire que $g(x)=o(\ln x)$ ($x\to+\infty$).

3) Supposons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lambda$ avec $\lambda\ne 0$. En appliquant ce qui précède à la fonction $f-\lambda$, donner un équivalent simple de $g(x)$ lorsque $x\to+\infty$

②

Problème 2

Etant donné une série convergente $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$, on note $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ son reste d'ordre n pour $n \in \mathbb{N}$ et on se propose d'étudier la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} R_n$

Partie I

1) On suppose que $u_k = (-1)^k x^k$ où $x \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer l'ensemble I des $x \in \mathbb{R}$ tels que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ converge et préciser sa somme $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$

b) Pour $x \in I$, expliciter R_n et montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} R_n$ converge. Calculer sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$

2) a) Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge. On pose $r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ le reste d'ordre n

b) Justifier successivement, pour $n \in \mathbb{N}$

$$|r_n| = (-1)^n r_n$$

$$|r_n| - |r_{n+1}| = (-1)^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$|r_n| - |r_{n+1}| \geq 0$$

En déduire que $\sum r_n$ converge

3) On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) \quad (n \to +\infty)$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

En séparant les termes pairs et impairs dans S_{2n} ainsi que dans $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$, déterminer la valeur de $r_0 = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Partie 2

On note toujours $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ pour une série convergente $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$

1) Soit une série convergente $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$. Exprimer pour $n \in \mathbb{N}$ la différence $\sum_{k=0}^{n} R_k - \sum_{k=1}^{n} k\, u_k$ en fonction de n et de R_n. Indication : exprimer u_k en fonction de R_k et R_{k-1}

2) On suppose de plus que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad u_k \geq 0$

a) Montrer que la convergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} R_k$ entraine la convergence de la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\, u_k$

b) On suppose que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k\, u_k$ est convergente, montrer que $\lim_{n\to+\infty} (n+1) R_n = 0$

c) Déduire de ce qui précède que les deux séries $\sum_{k\in\mathbb{N}} R_k$ et $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k u_k$ sont de même nature et comparer leurs sommes $\sum_{k=0}^{+\infty} R_k$ et $\sum_{k=1}^{+\infty} k u_k$

3) On pose $u_k = \frac{1}{k^x}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]1,+\infty[$. On note toujours $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$ le reste d'ordre n.

Préciser l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} R_n$ est convergente et exprimer $\sum_{k=0}^{+\infty} R_n$ à l'aide de $\xi(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^x}$.

Problème 3

Les 5\2 ne sont pas autorisés à utiliser les théorèmes de continuité et dérivabilité des séries de fonctions

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ la série $\sum f_n(x)$ converge. On note $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ sa somme

2) Calculer les valeurs de $F(0)$ et $F(1)$

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ la série $\sum f_n'(x)$ converge. On note $G(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)$ sa somme.

4) Dans cette question, on se propose d'étudier la dérivabilité de F. On pose $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi(t) = \frac{1}{t}$

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que :

$$\forall (x,x_0) \in ([n,+\infty[)^2 \quad |\varphi(x) - \varphi(x_0) - (x-x_0)\varphi'(x_0)| \leq \frac{(x-x_0)^2}{n^3}$$

b) En déduire que $|f_n(x+h) - f_n(x) - h f_n'(x)| \leq \frac{h^2}{n^3}$ pour x et h des réels tels que $x \geq 0, h \neq 0, x+h \geq 0$

c) En déduire qu'il existe une constante $K > 0$ indépendante de x et h telle que $\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - G(x)\right| \leq K|h|$

d) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que $F' = G$

5) Dans cette question, on se propose de calculer un équivalent de F en $+\infty$

a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $f_{k+1}(x) \leq \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt \leq f_k(x)$

b) En déduire un encadrement $\sum_{k=1}^{n} f_k(x)$

c) En faisant tendre n vers $+\infty$, en déduire un encadrement de $F(x)$

d) En déduire un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$