Lycée Clemenceau Nantes, PC, année 2024-2025* *le 12/10/24*

PC* Devoir Surveillé N°2 durée 4h

Problème 1 Centrale

Dans toute ce problème, on désigne par $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite dont le terme général est donné par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$

I Convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Q 1. Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de la différence $a_{n+1} - a_n$, puis déterminer la nature de la série numérique $\sum (a_{n+1} - a_n)$.

Q 2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers un réel que l'on notera γ pour toute la suite du problème, puis que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

II Une première expression intégrale de γ

Q3. Soient $(a,b,x) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$. Montrer que les intégrales $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-at}}{t} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ convergent

Q4. Soit $I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ (pour $x \in \mathbb{R}_+^*$). En séparant les deux intégrales et en effectuant un changement de variable dans chacune, montrer que $I(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{e^{-t}}{t} dt$. En encadrant e^{-t}, déterminer la limite de $I(x)$ lorsque $x \to 0^+$. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

Q5. On pose $\varphi : t \mapsto e^{-t}\left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right)$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

Q6. On pose $\forall t \in \mathbb{R}_+^*\quad \forall n \in \mathbb{N}\quad S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{-(k+1)t} - \frac{e^{-(k+1)t} - e^{-(k+2)t}}{t}\right)$

Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*\quad S_n(t) = \varphi(t)\left(1 - e^{-(n+1)t}\right)$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} S_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$

Q7. En utilisant la linéarité de l'intégrale, calculer $\int_0^{+\infty} S_n(t)\,dt$ et en déduire que $\gamma = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\,dt$

III Une deuxième expression intégrale de γ

Q 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier la continuité en 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1-(1-t)^n}{t}$.

Q 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que : $\int_0^1 (1-t)^{n-1}\,dt = \frac{1}{n}$

exprimer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ à l'aide d'une intégrale puis à l'aide d'un changement de variable affine, établir que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \int_0^1 \frac{1 - \left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u} du - \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{u}{n}\right)^n}{u} du.$$

Q 10. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n : \begin{cases} [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n}{t} & \text{si } 1\leqslant t\leqslant n \\ 0 & \text{si } n<t \end{cases} \end{cases}$$

Déterminer la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Q 11. Démontrer que l'on a : $\forall t \in [0,1[\,,\ \ln(1-t) \leqslant -t$.

Q 12. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du$.

Q 13. Établir la convergence, puis déterminer la limite sous forme d'une intégrale quand n tend vers $+\infty$, de la suite de terme général

$$\int_1^n \frac{\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n}{u}\,du.$$

Q 14. Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u}\,du$.

Q 15. À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in\,]0,1]\,,\ 0 \leqslant \frac{1-\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n}{t} \leqslant 1.$$

Q 16. Établir la convergence, puis déterminer la limite sous forme d'une intégrale quand n tend vers $+\infty$, de la suite de terme général

$$\int_0^1 \frac{1-\left(1-\dfrac{u}{n}\right)^n}{u}\,du.$$

En déduire que : $\displaystyle\gamma = \int_0^1 \frac{1-e^{-u}}{u}\,du - \int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du.$

Q 17. A désigne un réel strictement positif. Démontrer que : $\displaystyle\gamma = -\ln(A) + \int_0^A \frac{1-e^{-u}}{u}\,du - \int_A^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\,du.$

Q18. a) On rappelle que $\forall x\in\mathbb{R}\quad e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$. Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}_+^*\quad \dfrac{1-e^{-u}}{u} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k u^k}{(k+1)!}$.

On pose $S_n(u) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k u^k}{(k+1)!}$ et $R_n(u) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k u^k}{(k+1)!}$ pour $u\in\mathbb{R}_+^*$.

b) En utilisant le théorème spécial des séries alternées, majorer $|R_n(u)|$ puis montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^A R_n(u)\,du = 0$.

c) En écrivant $\displaystyle\int_0^A \frac{1-e^{-u}}{u}\,du = \int_0^A S_n(u)\,du + \int_0^A R_n(u)\,du$, montrer que $\displaystyle\int_0^A \frac{1-e^{-u}}{u}\,du = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k A^{k+1}}{(k+1)(k+1)!}$

Problème 2 Centrale

Rappel : Soit E un K-ev, F un sev de E et $f \in L(E)$. On dit que F est stable par f ssi $f(F) \subset F$ (c'est-à-dire $\forall x \in F \quad f(x) \in F$)

Dans tout le texte, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathbb{R}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.
Pour $a < b$ dans $\mathbb{Z}$, on note $[\![a, b]\!]$ l'ensemble $[a, b] \cap \mathbb{Z}$.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1}. On rappelle que $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ est une base. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et, lorsque P est non nul, $\mathrm{cd}(P)$ désigne le coefficient dominant de P, c'est-à-dire le coefficient du monôme $X^{\deg(P)}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0, k]\!]$, le coefficient binomial $\begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix}$ vaut $\dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.

Pour un ensemble E et $f : E \to E$, on définit par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ l'application $f^k : E \to E$ de la façon suivante :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \qquad \text{et} \qquad f^{k+1} = f \circ f^k$$

Si f est bijective, on note f^{-1} la réciproque de f et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.
Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille p.

I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

I.A – *L'opérateur de translation*

L'opérateur de translation est l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[X]$ donné par

$$\tau : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) \end{cases}$$

I.A.1) Pour un polynôme non nul $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\tau(P))$ et $\mathrm{cd}(\tau(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.

I.A.2) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(P)$ en fonction de P.

I.A.3) Donner la matrice $M = (M_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ de τ dans la base $(P_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$. On exprimera les coefficients $M_{i,j}$ en fonction de i et j.

I.A.5) L'application τ est-elle bijective ? Si oui, préciser τ^{-1}. L'expression de τ^j trouvée à la question I.A.2 pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle valable pour $j \in \mathbb{Z}$?

I.A.6) Que vaut M^{-1} ? Exprimer les coefficients $(M^{-1})_{i,j}$ en fonction de i et j.

I.A.7) On se donne une suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on définit pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} u_j \tag{I.1}$$

Déterminer une matrice $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

I.A.8) En déduire la formule d'inversion : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} v_j \tag{I.2}$$

I.A.9) On considère un réel λ et la suite $(u_k = \lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Quelle est la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la formule (I.1) ? Vérifier alors la formule (I.2).

I.B – *L'opérateur de différence*

L'opérateur de différence est l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\delta = \tau - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$:

$$\delta : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

I.B.1) Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\mathrm{cd}(\delta(P))$ à l'aide de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.

I.B.2) En déduire le noyau $\ker(\delta)$ et l'image $\mathrm{Im}(\delta)$ de l'endomorphisme δ.

I.B.3) Plus généralement, pour $j \in [\![1, n]\!]$, montrer les égalités suivantes :

$$\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \tag{I.3}$$

I.B.4) Pour $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\delta^k(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in [\![0, k]\!]$.

I.B.5) Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \tag{I.4}$$

I.B.6) Dans cette question, on se propose de montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $u : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.

a) Montrer que u et δ^2 commutent.

b) En déduire que $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par l'application u.

c) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Conclure.

I.B.7) Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'application δ.

a) Pour un polynôme non nul P de degré $d \leqslant n$, montrer que la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?

b) En déduire que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in [\![0, n]\!]$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

III Étude d'une famille de polynômes

On considère la famille de polynômes

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ H_k = \dfrac{1}{k!} \displaystyle\prod_{j=0}^{k-1} (X - j) \quad \text{pour } k \in [\![1, n]\!] \end{cases}$$

III.A – Généralités

III.A.1) Montrer que la famille $(H_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

III.A.2) Calculer $\delta(H_0)$ et, pour $k \in [\![1, n]\!]$, exprimer $\delta(H_k)$ à l'aide de H_{k-1}.

III.A.3) La matrice M définie à la question I.A.3 et la matrice M' de taille $n+1$ donnée par

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

III.A.4) Montrer que, pour $k, l \in [\![0, n]\!]$,

$$\delta^k(H_l)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

III.A.5) Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} (\delta^k(P))(0) H_k$$

III.B – Étude d'un exemple

III.B.1) Donner les coordonnées du polynôme $X^3 + 2X^2 + 5X + 7$ dans la base (H_0, H_1, H_2, H_3) de $\mathbb{R}_3[X]$.

III.B.2) En déduire un polynôme $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que $\quad \delta^2(P) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$