

PC* Devoir Surveillé N°3 durée 4h niveau CCINP**Problème 1 La fonction $\ln(\Gamma)$**

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- (i) la fonction f est de classe C^1 ,
- (ii) pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$,
- (iii) la fonction f' est croissante,
- (iv) la fonction f s'annule en 1, c'est-à-dire $f(1) = 0$.

Dans la suite, on note (C) l'ensemble de ces quatre conditions.

Partie I - Existence de la solution du problème étudié

Dans cette partie, on construit une fonction vérifiant les conditions de (C).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad u_n(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) - \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right).$$

Q1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

Q2. Justifier que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, puis montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum_{n \geq 1} \varepsilon_n$ converge absolument et que :

$$\forall (n, x) \in \mathbb{N}^* \times]0, +\infty[, \quad u'_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n.$$

Q3. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u'_n$ converge normalement sur tout segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$.

Q4. Montrer que la fonction φ vérifie les conditions de (C).

Partie II - Unicité de la solution

Dans cette partie, on montre que φ est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C). On considère une fonction $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les conditions de (C) et on pose $h = \varphi - g$.

Q5. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $h(x+1) = h(x)$ et $h'(x+1) = h'(x)$.

Q6. Soient $x \in]0, 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer successivement que :

$$\varphi'(p) - g'(1+p) \leq h'(x+p) \leq \varphi'(1+p) - g'(p), \quad \varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}.$$

Q7. En déduire que :

$$|h'(x+p) - h'(p)| \leq \frac{1}{p}.$$

Q8. Déduire des deux questions précédentes que la fonction h' est constante sur $]0, +\infty[$.

Q9. Conclure que $\varphi = g$.

Partie III - La formule de duplication

Dans cette partie, on considère la fonction $\psi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \psi(x) = (x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

Q10. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a la relation :

$$\exp\left(\sum_{n=1}^N u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1} \frac{(2^N N!)^2}{(2N)!}.$$

Q11. Déduire de la question précédente et de la formule de Stirling que $\psi(1) = 0$.

Q12. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$(x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

Partie IV - Fonction Digamma

On rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1) \quad (n \rightarrow +\infty)$

On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\varphi'(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{x+n}$ (cette fonction est appelée fonction Digamma)

Q13. On pose $T_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}$. Simplifier l'expression de T_n et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$. En déduire que

$$\varphi'(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$$

Q14. On pose $I(x) = \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t} dt$ pour $x > 0$. Montrer que cette intégrale converge.

Q15. En écrivant $\frac{1}{1-t}$ sous forme de série, montrer que $I(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1+x} \right)$ (on utilisera un théorème d'intégration terme à terme)

Q16. Montrer que $\int_0^1 t^{x-1} dt = \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Q17. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\varphi'(x) = -\gamma + \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t} dt$

Problème 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes réels de degré plus petit que n .
Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on dit que P est de degré n quand $a_n \neq 0$ et a_n s'appelle alors le coefficient dominant de P .

Pour tout entier naturel n , on appelle c_n la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$c_n(x) = \cos(n \arccos(x))$$

Partie I.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n , la fonction c_n est continue sur $[-1, 1]$.
2. Pour $x \in [-1, 1]$, donner une expression polynomiale de $c_0(x), c_1(x), c_2(x)$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [-1, 1], c_{n+1}(x) + c_{n-1}(x) = 2xc_n(x)$.
5. Soit la suite de polynômes $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$T_0 = 1, T_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme de degré n de coefficient dominant que l'on explicitera.

6. Prouver que pour tout n , la famille $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
7. Montrer que pour $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $T_n(x) = c_n(x)$.

$$\text{Montrer que } \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

Partie II.

1. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[X]$, on pose $(P|Q) = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.
 - 1.a. Vérifier que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.
Dans toute la suite du problème, $\mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire.
 - 1.b. Soient $p, q \in \mathbb{N}$. On pose $I_{p,q} = \int_0^\pi \cos(p\theta) \cos(q\theta) d\theta$.
Démontrer que si $p \neq q$ alors $I_{p,q} = 0$.
Calculer $I_{p,p}$.
 - 1.c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(T_0, \dots, T_n)$ définie en partie I est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$. C'est-à-dire $\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2 \quad i \neq j \Rightarrow (T_i | T_j) = 0$.

Calculer $\|T_k\|$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$

Partie III.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, on pose $\theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}$ et $x_k = \cos(\theta_k)$.

1. Vérifier que $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les racines du polynôme T_n défini dans la partie I.

2. Soit $\mathcal{L} = (L_1, \dots, L_n)$ la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange associés à $(x_1, \dots, x_n)$,

2.a. $\mathcal{L}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$?

2.b. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\forall G \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^1 \frac{G(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i G(x_i) \text{ avec } \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_j = \int_{-1}^1 \frac{L_j(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

2.c. Soit $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

- i. Justifier l'existence et l'unicité deux polynômes S et U de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tels que $R = ST_n + U$.
- ii. Montrer que

$$\int_{-1}^1 \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i R(x_i)$$

2.d. Dans toute cette question on fixe $k \in [1, n]$.

- i. On rappelle que $\forall x \in [-1, 1]$, $T_n(x) = c_n(x)$ (voir partie I.). Montrer que

$$T'_n(x_k) = \frac{(-1)^{k+1}n}{\sqrt{1-x_k^2}} = \frac{(-1)^{k+1}n}{\sin(\theta_k)}$$

- ii. Soit la fonction $\psi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \neq x_k, \psi_k(x) = \frac{T_n(x)}{(x-x_k)T'_n(x_k)} \text{ et } \psi_k(x_k) = 1$$

Vérifier que pour tout réel x , $\psi_k(x) = L_k(x)$.

- iii. Soit $j \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_k} \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)}$$

En déduire que l'intégrale $u_j = \int_0^\pi \frac{\cos(j\theta) - \cos(j\theta_k)}{\cos(\theta) - \cos(\theta_k)} d\theta$ existe. Montrer que

$$\lambda_k = \frac{(-1)^{k+1}}{n} u_n \sin(\theta_k)$$

- iv. On admet que

$$\forall j \in \mathbb{N}, u_{j+2} - 2u_{j+1} \cos(\theta_k) + u_j = 0$$

- v. En déduire que $\lambda_k = \frac{\pi}{n}$.

3. Démontrer que pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$ on a la relation

$$\int_{-1}^1 \frac{R(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n R\left(\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)\right)$$