

PC*	Devoir Surveillé N°3	durée 4h Niveau Centrale-Mines
------------	-----------------------------	---------------------------------------

Problème 1 :

Les parties sont (relativement) indépendantes

Le problème porte sur l'étude des séries factorielles, séries de fonctions de la forme $\sum a_n \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$

Partie I : Etude d'un exemple

Posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ et $f_n(x) = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ pour $x > 0$

On admettra que $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

- 1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$
- 2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
- 3) Déterminer une relation entre $f(x)$ et $f(x+1)$. En déduire un équivalent de f en 0^+
- 4) On pose $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ $P_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (X+i)$
 - a) Montrer que les polynômes $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$
 - b) En déduire qu'il existe des réels indépendants de x notés $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que $\forall x > 0$

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha_k}{x+k} \quad \text{Montrer que } \alpha_k = (-1)^k \binom{n}{k}$$

- c) Montrer que $f(x) = e \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ (indication : effectuer le produit de Cauchy de $\sum \frac{1}{n!}$ avec

$$\sum \frac{(-1)^n}{n!(x+n)})$$

- d) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$

Partie II : Séries factorielles

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $u_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$; $v_n(x) = \frac{1}{(n+1)^x}$; $w_n(x) = \frac{u_n(x)}{v_n(x)}$

On désigne par A l'ensemble des suites complexes $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sum a_n u_n(x)$ soit absolument convergente

- 1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{w_n(x)}{w_{n-1}(x)} \right)$ est convergente

- 2) En déduire qu'il existe $l(x)$ strictement positif tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n(x)}{v_n(x)} = l(x)$

- 3) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe et $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrer que la série $\sum a_n u_n(x)$ est absolument convergente si et seulement si la série $\sum a_n v_n(x)$ est absolument convergente

Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un élément de A et la fonction f_a définie par $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n(x)$

- 4) Montrer que f_a est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

- 5) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = 0$

- 6) a) Donner un exemple d'un élément a de A tel que $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \neq 0$

- b) Donner l'exemple d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui ne soit pas un élément de A

- 7) Soit $a \in A$

- a) Montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x+k} \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right)$

- b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u'_n(x)| \leq u_n(x) \left(\frac{1}{x} + \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) \right)$ (dérivée $\ln u_n(x)$)

- c) Soit $\alpha > 0$ et $\alpha' \in]0, \alpha[$. Montrer que $|a_n|(\ln n)u_n(\alpha) = o(|a_n|u_n(\alpha'))$ ($n \rightarrow +\infty$)

(on pourra utiliser la question 2)

- 8) En déduire que f_a est de classe C^1 sur tout intervalle $[\alpha, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$ donc C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$

Partie III : Représentation intégrale

On reprend les notations de la partie II

- 1) Pour $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}$, montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^1 (1-y)^{x-1+k} dy$ et calculer sa valeur en fonction de k et de x

- 2) a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n dy = \frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ (utiliser I 4) b))

- b) En déduire que pour tout élément a de A on a :

$$\forall x > 0 \quad f_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 (1-y)^{x-1} y^n dy$$

- 3) Soit $a \in A$. Montrer que $\sum \frac{a_n}{n+1}$ converge absolument. En déduire que $\sum a_n y^n$ converge pour $y \in [0, 1[$

- 4) On pose $\forall y \in [0, 1[\quad \varphi_a(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^n$. Montrer que φ_a est continue sur $[0, 1[$

- 5) Montrer que pour $a \in A$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f_a(x) = \int_0^1 (1-y)^{x-1} \varphi_a(y) dy$

Définitions et notations

Dans ce problème, E désigne le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, et E_2 le sous ensemble de E formé des applications de carrés intégrables sur $\mathbb{R}^+$.

(c'est-à-dire les applications $f \in E$ telles que f^2 soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$)

À toute fonction $f \in E$ on associe la fonction, notée $\psi(f)$, définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\psi(f)(0) = f(0) \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad \psi(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

Q1. Montrer que si f et g sont deux éléments de E_2 , leur produit fg est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

(on pourra montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$)

Q2. Montrer alors que E_2 est un sous-espace vectoriel de E .

Q3. Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)g(t) dt$ est un produit scalaire sur E_2 .

Dans la suite, ce produit scalaire se notera $(\cdot | \cdot)$ et $\|\cdot\|$ désignera la norme associée.

Soit f un élément de E ; on note g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall x \geq 0, \quad g(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Q4. Justifier que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et que la fonction $\psi(f)$ est un élément de E .

Q5. Montrer que ψ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E .

Montrer que ψ est injectif.

L'endomorphisme ψ est-il surjectif ?

Soit f un élément de E_2

Q6. Calculer la limite en 0^+ de la fonction $t \mapsto \frac{g^2(t)}{t}$. (on fera intervenir $\psi(f)$)

Q7. Montrer que, pour tout réel $b > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{g^2(t)}{t^2}$ est intégrable sur $]0, b]$ et que

$$\int_0^b \psi(f)^2(t) dt = \int_0^b \frac{g^2(t)}{t^2} dt = -b\psi(f)^2(b) + 2 \int_0^b f(t)\psi(f)(t) dt. \quad (1)$$

En déduire que, pour tout réel $b > 0$,

$$\int_0^b \psi(f)^2(t) dt \leq 2 \left(\int_0^b f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^b \psi(f)^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Q8. Conclure que $\psi(f) \in E_2$ et que $\|\psi(f)\| \leq 2\|f\|$.

On pose $A = \left\{ \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} ; f \in E_2 \setminus \{0\} \right\}$. Que peut-on en déduire pour $\sup(A)$?

Soit f un élément de E_2 .

Q9. En utilisant la formule (1) montrer que la fonction $x \mapsto x\psi(f)^2(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

Montrer alors que $(\psi(f)|\psi(f)) = 2(f|\psi(f))$.

Q10. Soit $f \in E_2$ une fonction telle que $\|\psi(f)\| = 2\|f\|$. Calculer $\|\psi(f) - 2f\|^2$

Montrer que $\psi(f) - 2f = 0$. En déduire une équation différentielle vérifiée par f , en déduire une expression de f puis montrer que f est la fonction nulle.

On pose toujours $A = \left\{ \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} ; f \in E_2 \setminus \{0\} \right\}$.

Q11. Montrer que $A \subset]0, 2[$

Q12. On admettra que pour $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$

On considère un réel $a > 0$ et on note f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_a(x) = e^{-ax}$, $x \geq 0$.

Montrer que la fonction $f_a \in E_2$ et calculer $\|f_a\|^2$.

Calculer $\psi(f_a)(x)$ pour tout $x \geq 0$ puis donner les valeurs de $(f_a|\psi(f_a))$ et de $\frac{\|\psi(f_a)\|}{\|f_a\|}$.

On veut déterminer $\text{Sup}(A)$ et $\text{Inf}(A)$

Q13. Pour tout $s \in]-1, -\frac{1}{2}[$ on note f_s la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f_s(0) = 0, f_s(t) = t^s \text{ si } t \geq 1, \text{ et } f_s \text{ affine sur } [0, 1].$$

Vérifier que $f_s \in E_2$ et calculer $\|f_s\|^2$

Calculer $\|\psi(f_s)\|^2$ en fonction de s

Q14. En déduire une minoration de $\text{Sup}(A)$ en fonction de s puis faire tendre s vers $-\frac{1}{2}$.

En déduire que $\text{Sup}(A) = 2$

Q15. Soit $\alpha > 0$; on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(t) = t^\alpha \text{ si } t \in [0, 1], \text{ et } f(t) = t^{-\alpha-1} \text{ si } t \in [1, +\infty[.$$

Vérifier que $f \in E_2$ et calculer $\|f\|^2$ en fonction de α .

Calculer $\|\psi(f)\|^2$ en fonction de α

En déduire que la borne inférieure de l'ensemble $\left\{ \frac{\|\psi(f)\|}{\|f\|} ; f \in E_2 \setminus \{0\} \right\}$ est nulle.