Lycée Clémenceau Nantes, PC, année 2024-2025* *le 11/01/2025*

PC* Devoir Surveillé N°4 durée 4h Niveau Centrale-Mines

Problème :

L'objectif de ce sujet est d'établir le théorème de Perron-Frobenius pour une certaine classe de matrices symétriques. Ce théorème étudie les espaces propres d'une matrice associés aux valeurs propres de module maximal. Une application, en conclusion, montre une ouverture à l'analyse spectrale des matrices à coefficients positifs.

— La partie I permet d'obtenir des résultats préliminaires, utiles pour les parties suivantes.

— La partie II examine, à titre d'exemple, le cas des matrices à coefficients strictement positifs de taille deux.

— La partie III s'intéresse au lien entre le rayon spectral d'une matrice et le comportement asymptotique de la suite de ses puissances successives ; elle est indépendante de la partie II.

— La partie IV donne une démonstration du théorème pour une classe de matrices symétriques à coefficients positifs ; elle est indépendante des parties II et III.

Notations et définitions

$\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes.

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

— On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

— Si $A = (A_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $|A|$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont $|A_{ij}|$ ($1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$).

— Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dite positive (respectivement strictement positive) lorsque tous ses coefficients sont positifs ou nuls (respectivement strictement positifs). La notation $A \geqslant 0$ (respectivement $A > 0$) signifie que la matrice A est positive (respectivement strictement positive).

— Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la notation $A \geqslant B$ (respectivement $A > B$) signifie que la matrice $A - B$ est positive (respectivement strictement positive). De même, la notation $A \leqslant B$ (respectivement $A < B$) signifie que la matrice $B - A$ est positive (respectivement strictement positive).

— Les propriétés suivantes pourront être librement utilisées (sous réserve que les opérations correspondantes puissent être envisagées) :

- $|A + B| \leqslant |A| + |B|$;
- $|A^\top| = |A|^\top$;
- si $\gamma \in \mathbb{K}$, alors $|\gamma A| = |\gamma||A|$;
- si $A \geqslant 0$ et $B \geqslant 0$, alors $AB \geqslant 0$.

— On rappelle que le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est défini, pour tous vecteurs X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par

$$(X \mid Y) = X^\top Y = \sum_{k=1}^{n} X_k Y_k, \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

La norme euclidienne (associée à ce produit scalaire) du vecteur X est alors donnée par

$$\|X\| = \sqrt{X^\top X} = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \right)^{1/2}.$$

— Le spectre d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathrm{sp}(A)$.

— Le rayon spectral d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de spectre non vide, est le réel positif ou nul, noté $\rho(A)$, défini par

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{sp}(A)\}.$$

— On dit qu'une norme $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{R}$ est sous-multiplicative si, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$N(AB) \leqslant N(A)N(B).$$

I Résultats préliminaires

Q 1. Soit n un entier naturel, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\text{si } A > 0,\ X \geqslant 0 \text{ et } X \neq 0, \text{ alors } AX > 0,$$

et que

$$|AB| \leqslant |A||B|.$$

Q 2. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour deux vecteurs $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

En déduire que si n est un entier naturel et $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$ sont des nombres complexes, alors

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k||w_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right)^{1/2}.$$

Q 3. Soit z un nombre complexe tel que $|1+z| = 1+|z|$. Montrer que $z \in \mathbb{R}_+$. En déduire que, si z et z' sont deux nombres complexes vérifiant $|z+z'| = |z|+|z'|$ et $z \neq 0$, alors

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ \mid z' = \alpha z.$$

Q 4. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes non tous nuls tels que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|.$$

Montrer que

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \mid \forall k \in [\![1, n]\!],\ z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|z_k|.$$

Dans le cas où $z_1 \neq 0$, on pourra appliquer le résultat de la question précédente aux couples (z_1, z_k) pour $k \in [\![2, n]\!]$.

II Matrices strictement positives de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit a, b, c et d des nombres réels strictement positifs et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Q 5. Exprimer le discriminant Δ du polynôme caractéristique de A en fonction de a, b, c et d.

Q 6. Montrer que $\Delta > 0$. En déduire qu'il existe deux réels λ et μ, vérifiant $\lambda < \mu$, tels que A soit semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Q 7. Montrer que $|\lambda| < \mu$.

Q 8. Montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice L non nulle si et seulement si $\mu = 1$. En cas de convergence, préciser le rang de L puis montrer que L est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^2$.

Q 9. Soit α et β deux réels de $]0, 1[$ et B la matrice $\begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix}$. Montrer que B est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix}$ et donner une matrice S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, inversible, telle que $B = SDS^{-1}$.

Q 10. En déduire que la suite $(B^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice Λ que l'on explicitera.

III Normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; rayon spectral

III.A – Exemples de normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Pour toute matrice $A = (A_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|\right) \quad \text{et} \quad \|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2\right)^{1/2}.$$

Q 11. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q 12. On admet que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; montrer que cette norme est sous-multiplicative.

Indication : on pose $AB = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, appliquer l'inégalité triangulaire à $|c_{i,j}|$ puis la Q 2

Q 13. Soit N une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et S une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'on définit une norme sous-multiplicative ν sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en posant $\nu(A) = N(S^{-1}AS)$ pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

III.B – Rayon spectral

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

III.B.1)

Q 14. Soit S une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comparer $\rho(A)$ et $\rho(S^{-1}AS)$.

Q 15. Justifier que A est trigonalisable. Comparer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\rho(A^k)$ et $\rho(A)^k$ et, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $\rho(\alpha A)$ et $\rho(A)$.

Q 16. Montrer que, pour toute norme N sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) \leqslant N(A)$.
On pourra fixer une valeur propre λ de A et mettre en évidence une matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $AH = \lambda H$.

III.B.2)

Le but de cette section est de montrer que, pour tout réel strictement positif $\varepsilon > 0$, il existe une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sous-multiplicative (dépendant de A et de ε), telle que

$$N(A) \leqslant \rho(A) + \varepsilon.$$

À cette fin, on introduit, pour tout réel strictement positif τ, la matrice diagonale

$$D_\tau = \mathrm{diag}(1, \tau, \ldots, \tau^{n-1})$$

et on considère une matrice T triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q 17. Calculer le produit $D_\tau^{-1} T D_\tau$ en précisant, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, l'expression du coefficient en position (i,j) de la matrice $D_\tau^{-1} T D_\tau$ en fonction de τ et des coefficients de la matrice T.

Q 18. Soit $(\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs qui converge vers 0. Déterminer $\lim\limits_{k\to+\infty} D_{\tau_k}^{-1} T D_{\tau_k}$

En déduire que $\lim\limits_{k\to+\infty} \left\| D_{\tau_k}^{-1} T D_{\tau_k} \right\|_\infty = \rho(T)$. En déduire $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \tau \in \mathbb{R}_+^* \quad \left\| D_\tau^{-1} T D_\tau \right\|_\infty \leq \rho(T) + \varepsilon$

Q 19. Soit T une matrice triangulaire semblable à A

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme sous multiplicative N' telle que $N'(T) \leq \rho(T) + \varepsilon$

En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une norme sous multiplicative N telle que $N(A) \leq \rho(A) + \varepsilon$

III.B.3)

Q 20. Utiliser ce qui précède pour montrer que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle si et seulement si $\rho(A) < 1$.

Indication : pour le sens réciproque, on pourra montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \varepsilon < 1$

IV Théorème de Perron-Frobenius pour une classe de matrices symétriques positives

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et positive (c'est-à-dire à coefficients positifs ou nuls). On pose $r = \rho(A)$.

On admet qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe une base orthonormée de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ (pour le produit scalaire usuel) formée de vecteurs propres de A.

Soit $(E_1, \ldots, E_n)$ cette base orthonormée. On a alors $\forall k \in [\![1,n]\!] \quad A E_k = \lambda_k E_k$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (non nécessairement distinctes)

IV.A –

Q 21. Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, $X = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k E_k$. Montrer que $X^T A X = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^2 \lambda_k$

Q 22. Montrer que $r > 0$.

On note μ la plus grande valeur propre de A.

Q 23. Montrer que, pour tout vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, unitaire pour la norme euclidienne canonique, $X^\top AX \leqslant \mu$.

Q 24. Montrer que cette inégalité est une égalité si, et seulement si, X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre μ.

Q 25. Montrer que, pour tout vecteur unitaire X, $|X^\top AX| \leqslant |X|^\top A|X| \leqslant \mu$.

Q 26. En déduire que, pour toute valeur propre λ de A, on a $|\lambda| \leqslant \mu$, et que $\mu = r$.

IV.B – Dans cette sous-partie uniquement, on suppose en outre que A est strictement positive.

Q 27. Montrer que, si X est un vecteur propre de A, unitaire, associé à la valeur propre r, alors $|X|$ est un vecteur propre de A, unitaire, associé à la valeur propre r, et que $|X| > 0$.

Q 28. Montrer que $X = |X|$ ou $X = -|X|$.

Q 29. Montrer que le sous-espace propre $\ker(A - rI_n)$ est de dimension 1.
On pourra raisonner par l'absurde en considérant deux vecteurs propres de A orthogonaux associés à r.

Q 30. Montrer que la multiplicité de r, en tant que valeur propre, vaut 1 et en déduire que $-r$ n'est pas valeur propre de A. Ainsi, r est l'unique valeur propre de A de module égal à r.

Q 31. Montrer que cette propriété n'est pas forcément vérifiée si A est seulement supposée positive.
On pourra chercher des exemples dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice :

On considère la répétition infinie du lancer d'une pièce dont la probabilité de « faire pile » est p.

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit A_n et B_n par

— A_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a autant de piles que de faces » ;

— B_n : « à l'issue des $2n$ premiers lancers, il y a pour la première fois autant de piles que de faces ».

Par exemple si les six premiers lancers donnent dans l'ordre (face, face, pile, pile, face, pile), A_1 n'est pas réalisé mais A_2 et A_3 le sont, B_2 est réalisé mais B_1 et B_3 ne le sont pas.

Enfin on définit C, « au bout d'un certain nombre (non nul) de lancers, il y a autant de piles que de faces ».

Q1. Déterminer $\mathbb{P}(A_n)$. Montrer que $\mathbb{P}(C) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_n)$.

Q2. On pose $A_0 = \Omega$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(B_k)\mathbb{P}(A_{n-k})$.

Q3. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \binom{2n}{n} x^n$ est $R = 1/4$.

On admet que $\forall x \in]-R, R[\ \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$. Montrer que $\forall x \in]-R, R[\setminus \{0\}\ \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

Q4. En déduire que, pour tout $x \in]-R, R[\setminus \{0\}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} x^n = \frac{1}{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}} - 1\right)$.

Q5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2n+2}{n+1}.$$

Q6. A l'aide de Q2 et Q5, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(B_n) = \frac{2}{n} \binom{2n-2}{n-1} (p(1-p))^n$.

Q7. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$, montrer que $\mathbb{P}(C) = 1 - \sqrt{1-4p(1-p)}$ (utiliser Q3)

Q8. On suppose que $p = \frac{1}{2}$, montrer que $\mathbb{P}(C) = 1$.