PC* Devoir Surveillé N°4 durée 4h Niveau X-ENS

Rappel sur les séries entières : *La série $\sum n a_n z^n$ a le même rayon de convergence que la série $\sum a_n z^n$

***Le rayon de convergence d'une somme de deux séries entières est supérieur ou égal au minimum des rayons de convergence des deux séries. *Même résultat pour le rayon de convergence du produit de Cauchy de deux séries entières.**

Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes :

- Pour tous entiers naturels m, n, on note $[\![m;n]\!]$ l'ensemble des entiers naturels k vérifiant $m \leqslant k \leqslant n$.
- Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ la factorielle de n. On convient que $0! = 1$.
- Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant n lignes et m colonnes. Si $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;m]\!]$, on note $[A]_{i,j}$ le coefficient de A appartenant à la i-ème ligne et à la j-ème colonne. La matrice transposée de A est notée ${}^tA \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et sa matrice conjuguée est notée $\overline{A} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$. Les coefficients de $\overline{A}$ sont donnés par
$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;m]\!],\ [\overline{A}]_{i,j} = \overline{[A]_{i,j}}.$$
On pose $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$, et on note I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant d'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sera noté $\det(A)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A^k la puissance k-ème de A et on convient que $A^0 = I_n$.
Quand $n = 1$, on identifie la matrice $A \in \mathscr{M}_1(\mathbb{K})$ à son unique coefficient $[A]_{1,1} \in \mathbb{K}$.
- Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathbb{K}[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)}$ désigne la dérivée k-ème de P. On convient que $P^{(0)} = P$. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on désigne par $\mathbb{K}_n[X]$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et de degré inférieur ou égal à n.

Dans toute la suite de cet énoncé, $n \geqslant 2$ désigne un entier naturel. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\mathrm{Spec}(A)$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A et on pose
$$\varrho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \mathrm{Spec}(A)\}. \quad \text{(aussi noté } \rho(A)\text{)}$$
On note $\mathscr{V}(A)$ l'ensemble
$$\mathscr{V}(A) = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P \neq 0_{\mathbb{C}[X]} \text{ et } P(A) = 0_n\}.$$
(c'est-à-dire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ non nuls et annulateurs de A).

Pour toute suite $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ de nombres complexes, on adopte les notations suivantes

— on note $R_u \in [0, +\infty]$ le rayon de convergence de la série entière $\sum u_k z^k$ et D_u son disque ouvert de convergence défini par
$$D_u = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R_u\}.$$

— pour tout $z \in D_u$, on note $U(z)$ (avec U lettre majuscule) la somme

$$U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^k.$$

— On convient que $u^{(0)} = u$ et on note $u^{(1)}$ la suite définie par

$$\forall k \in \mathbb{N},\ u_k^{(1)} = (k+1)u_{k+1},$$

Plus généralement pour tout entier naturel $m \geqslant 0$, on pose

$$u^{(m+1)} = (u^{(m)})^{(1)}.$$

Pour tout $m \geqslant 0$ et tout $z \in D_{u^{(m)}}$ on pose

$$U^{(m)}(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k^{(m)} z^k.$$

— Si $v = (v_k)_{k\geqslant 0}$ est une autre suite de nombres complexes, on note $u+v$ la suite $(u_k+v_k)_{k\geqslant 0}$ et $u \star v$ la suite $(w_k)_{k\geqslant 0}$ de terme général donné par

$$w_k = \sum_{i=0}^{k} u_i v_{k-i} \text{ pour tout } k \geqslant 0.$$

On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est *compatible avec u* si

$$\varrho(A) < R_u.$$

On note $\mathbb{M}_n(u)$ l'ensemble de toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ compatibles avec u :

$$\mathbb{M}_n(u) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mid \varrho(A) < R_u\}.$$

On note ${}^tA$ la transposée de A

Les parties III et IV de cet énoncé sont majoritairement indépendantes.

PARTIE I : PRÉLIMINAIRES

(0) i) Montrer que A est nilpotente si et seulement si $\rho(A)=0$

ii) Montrer que $\forall \alpha \in \mathbb{C}^*$ $\rho(\alpha A)=|\alpha|\rho(A)$

Soit $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes.

(1) Donner une condition nécessaire et suffisante sur R_u pour que $\mathbb{M}_n(u) = \emptyset$ et donner un exemple de u pour laquelle on a cette égalité.

(2) Montrer que $\mathbb{M}_n(u) \neq \{0_n\}$.

(3) Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes

(i) $R_u = +\infty$,

(ii) $\mathbb{M}_n(u) = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,

(iii) $\mathbb{M}_n(u) \neq \emptyset$ et $\forall A \in \mathbb{M}_n(u)$, $\forall B \in \mathbb{M}_n(u)$, $A+B \in \mathbb{M}_n(u)$,

et donner un exemple de suite u vérifiant ces trois assertions et telle que $u_k \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

(4) Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence des deux assertions suivantes

(i) $A \in \mathbb{M}_n(v)$ pour toute suite $v = (v_k)_{k\geqslant 0}$ de $\mathbb{C}$ vérifiant $R_v > 0$.

(ii) A est nilpotente (c'est-à-dire il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_n$).

(5) Montrer que pour tout entier $m \geqslant 0$, on a

$$D_{u(m)} = D_u.$$

(6) Soit $v = (v_k)_{k\geqslant 0}$ une autre suite de nombres complexes. Montrer que

$$\mathbb{M}_n(u) \cap \mathbb{M}_n(v) \subset \mathbb{M}_n(u+v) \cap \mathbb{M}_n(u \star v).$$

(7) i)

Considérons deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent ($AB = BA$)

Montrer que A et B ont un vecteur propre commun (on pourra faire intervenir les endomorphismes canoniquement associés aux matrices). Montrer que A et B sont trigonalisables dans la même base c'est-à-dire il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures (on pourra procéder par récurrence sur n)

ii) On suppose dans cette question que $0 < R_u \leqslant 1$. Soient $A \in \mathbb{M}_n(u)$ et $B \in \mathbb{M}_n(u)$ deux matrices tellesque $AB = BA$. Montrer que $AB \in \mathbb{M}_n(u)$.

PARTIE II : FONCTIONS DE MATRICES

Soit $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{M}_n(u) \neq \emptyset$. Soit $A \in \mathbb{M}_n(u)$.

(8) Montrer que $\mathscr{V}(A)$ est non vide.

(9) Soit

$$m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \exists P \in \mathscr{V}(A) \text{ avec } \deg(P) = k\}.$$

Montrer qu'il existe un et un seul polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant les trois conditions

(i) $p \in \mathscr{V}(A)$,

(ii) $\deg(p) = m$,

(iii) p unitaire.

On note désormais φ_A ce polynôme.

(10) Soit $P \in \mathscr{V}(A)$. Montrer que φ_A divise P.

(11) Montrer que les racines de φ_A dans $\mathbb{C}$ sont exactement les valeurs propres de A.

(12) Montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ alors φ_A est à coefficients réels (c'est-à-dire $\varphi_A \in \mathbb{R}[X]$).

On note désormais $\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell$ les valeurs propres de A, avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. On note $m_1 \geqslant 1, \cdots, m_\ell \geqslant 1$ les multiplicités de $\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell$ respectivement en tant que racines de φ_A. Ainsi on a

$$\varphi_A(X) = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_\ell)^{m_\ell}$$

avec

$$m = m_1 + \cdots + m_\ell.$$

(13) Montrer que l'application

$$T : P \in \mathbb{C}_{m-1}[X] \mapsto (P(\lambda_1), P'(\lambda_1), \cdots, P^{(m_1-1)}(\lambda_1), \cdots, P(\lambda_\ell), P'(\lambda_\ell), \cdots, P^{(m_\ell-1)}(\lambda_\ell)) \in \mathbb{C}^m$$

est un isomorphisme et en déduire qu'il existe un et un seul polynôme $Q \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![1;\ell]\!],\ \forall k \in [\![0; m_i - 1]\!],\ Q^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i).$$

Dans toute la suite, on pose

$$u(A) = Q(A).$$

(14) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $u(A) = P(A)$ si et seulement si

$$\forall i \in [\![1;\ell]\!],\ \forall k \in [\![0; m_i - 1]\!],\ P^{(k)}(\lambda_i) = U^{(k)}(\lambda_i).$$

(15) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| < R_u$. Montrer que

$$u(\alpha I_n) = U(\alpha) I_n.$$

(16) On suppose dans cette question uniquement que $n = 2$. Déterminer $u(A)$ dans le cas suivant :

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

où α, β et γ sont des réels fixés avec $\alpha \neq \beta$ et $\{\alpha, \beta\} \subset D_u$. On exprimera les coefficients de $u(A)$ en fonction α, β et γ, $U(\alpha)$ et $U(\beta)$.

(17) Soit $B \in \mathbb{M}_n(u)$.

on admettra cette question

(a) Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$u(A) = R(A) \text{ et } u(B) = R(B).$$

(b) On suppose que $AB \in \mathbb{M}_n(u)$ et $BA \in \mathbb{M}_n(u)$. Montrer que

$$Au(BA) = u(AB)A.$$

(18) Soit $v = (v_k)_{k\geqslant 0}$ une autre suite de $\mathbb{C}$ telle que $A \in \mathbb{M}_n(v)$. On suppose dans cette question uniquement que les valeurs $\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell$ sont réelles. Montrer que

$$(u \star v)(A) = u(A)v(A)$$

(après avoir justifié que $A \in \mathbb{M}_n(u \star v)$).

Partie III : cas de matrices diagonalisables

Soit $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{C}$ telle que $\mathbb{M}_n(u) \neq \emptyset$. Soit $A \in \mathbb{M}_n(u)$. On suppose dans toute cette partie que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et on note $\lambda_1, \cdots, \lambda_\ell$ ses valeurs propres avec $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$.

(19) Montrer que

$$\varphi_A(X) = (X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_\ell).$$

(20) Pour tout $k \in [\![1;\ell]\!]$ on définit le polynôme :

$$Q_k^A(X) = \prod_{j=1, j\neq k}^{\ell} \frac{X - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}$$

(on notera que les polynômes Q_k^A dépendent de la matrice A).

(a) Montrer que

$$u(A) = \sum_{k=1}^{\ell} U(\lambda_k) Q_k^A(A).$$

(b) Montrer que pour tout $k \in [\![1;\ell]\!]$, $Q_k^A(A)$ est une projection dont on précisera l'image et le noyau.

Indication : Montrer que pour $Y \in Ker(A - \lambda_i I_n)$, $Q_k^A(A)Y = \delta_{i,k} Y$

(c) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{\ell} Q_k^A(A) = I_n.$$

(21) Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible. Montrer que

$$u(BAB^{-1}) = Bu(A)B^{-1}.$$

(22) Soit $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice diagonale et $S \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible telles que $A = SDS^{-1}$.

(a) Montrer que $u(D)$ est diagonale et que

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ [u(D)]_{i,i} = U([D]_{i,i}).$$

(b) En déduire une expression de $u(A)$.

Partie IV : application à des cas particuliers

Dans cette partie, on suppose que $n \geqslant 4$. Soit $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de $\mathbb{C}$ vérifiant la condition (C^*) suivante :

$$R_u > 1 \qquad (C^*)$$

(23) Soit $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice donnée par

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer le polynôme φ_H dans ce cas.

(b) Soit $A = H + \alpha I_n$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ est tel que $|\alpha| < R_u$. Montrer que

$$u(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{U^{(k)}(\alpha)}{k!} H^k$$

et en déduire que

$$u(A) = \begin{pmatrix} U(\alpha) & \frac{U^{(1)}(\alpha)}{1!} & \frac{U^{(2)}(\alpha)}{2!} & \cdots & \frac{U^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} \\ 0 & U(\alpha) & \frac{U^{(1)}(\alpha)}{1!} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{U^{(2)}(\alpha)}{2!} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{U^{(1)}(\alpha)}{1!} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & U(\alpha) \end{pmatrix}.$$

(24) Soit $G \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$G = Y\,{}^tZ$$

où $Y, Z \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ sont deux vecteurs colonnes tels que ${}^tY\,Y = {}^tZ\,Z = 1$.

(a) Montrer que G est de rang 1 et donner son image.

(b) Montrer que 0 et ${}^tZ\,Y$ sont les seules valeurs propres de G.

(c) En déduire que $G \in \mathrm{M}_n(u)$.

(d) Déterminer φ_G quand ${}^tZ\,Y \neq 0$.

(e) En déduire que si ${}^tZ\,Y \neq 0$ alors

$$u(G) = U(0)I_n + \frac{U({}^tZ\,Y) - U(0)}{{}^tZ\,Y} G.$$

(f) Déterminer une expression simple de $u(G)$ quand ${}^tZY = 0$.

(25) Soit $F \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice définie par

$$[F]_{k,j} = \frac{1}{\sqrt{n}}\omega^{(k-1)(j-1)} \text{ pour tout } (k,j) \in [\![1;n]\!]^2,$$

où

$$\omega = e^{-2\pi i/n}$$

(ici i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$).

(a) Montrer que F est inversible et que $F^{-1} = \overline{F}$.

(b) Montrer que $F^2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(c) En déduire que $F^4 = I_n$ et que $F \in \mathrm{M}_n(u)$.

(d) En déduire que

$$\begin{aligned} u(F) &= \frac{1}{4}\left(U(1)(F+I_n) - U(-1)(F-I_n)\right)(F^2+I_n) \\ &+ \frac{i}{4}\left(U(i)(F+iI_n) - U(-i)(F-iI_n)\right)(F^2-I_n). \end{aligned}$$

(26) Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$

(a) On pose $\forall k \in [\![0,N]\!]$ $u_k = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$ et $\forall k \geq N+1$ $u_k = 0$

Vérifier que u satisfait la condition $(C^\star)$ et trouver une expression simple de $u(A)$ pour tout $A \in \mathrm{M}_n(u)$.

(b) On pose $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $u_k = p(1-p)^{k-1}$

Vérifier que u satisfait la condition $(C^\star)$ et montrer que

$$u(A) = p(I_n - (1-p)A)^{-1}A$$

pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(u)$ diagonalisable.