Lycée Clémenceau Nantes, PC, année 2024-2025* *le 01/02/2025*

PC* Devoir Surveillé N°5 durée 4h

Inégalité de Markov : Si X est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'espérance finie on a : $\forall \alpha > 0 \quad P(X \geq \alpha) \leq \dfrac{E(X)}{\alpha}$

Problème 1 :

Le problème étudie quelques propriétés de variables aléatoires réelles finies de la forme $\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$, où les a_k sont des réels et les X_k sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\{1, -1\}$
La première partie établit des résultats sur des intégrales, utilisés dans les parties suivantes.
À partir de la deuxième partie, on suppose donnée une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\{1, -1\}$ et vérifiant

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

I Suites et intégrales

I.A – *Étude d'une intégrale à paramètre*

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} \, dt$$

I.A.1) Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$ et de classe C^2 sur $]0, +\infty[$.

I.A.2) Déterminer les limites de f et f' en $+\infty$.

I.A.3) Exprimer f'' sur $]0, +\infty[$ à l'aide de fonctions usuelles et en déduire que

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$$

I.A.4) Montrer

$$\begin{cases} \forall x > 0, \quad f(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2} \\ f(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

I.A.5) Montrer

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad |s| = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(st)}{t^2} \, dt \qquad \text{(penser à utiliser } f(0)\text{)}$$

I.B – *Étude d'une suite d'intégrales*

Dans cette section, on étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^{\infty} \frac{1 - (\cos t)^n}{t^2} \, dt$$

I.B.1) Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser la monotonie de la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

I.B.2) Montrer que $u_1 = u_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

I.C – *Calcul d'un équivalent de u_n*

I.C.1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n \qquad \text{avec} \qquad v_n = \int_0^{\infty} \frac{1 - \left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}} \, du$$

I.C.2) Soit $f : u \mapsto \left(\cos\left(\sqrt{\frac{2u}{n}}\right)\right)^n$. Montrer que $\forall u \in \left]0,1\right]$ $|f'(u)| \leq 1$

En déduire : $\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times \left]0,1\right], \quad \left|1 - \left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n\right| \leqslant u$.

I.C.3) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie l vérifiant

$$l = \int_0^{\infty} \frac{1-e^{-u}}{u\sqrt{u}}\, du$$

I.C.4) On admet la relation $\int_0^{\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\, du = \sqrt{\pi}$.

Conclure que $u_n \sim \sqrt{\frac{n\pi}{2}}$.

II Autour du pile ou face

Dans cette partie, comme il est indiqué dans le préambule, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{1, -1\}$ et telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
L'espérance d'une variable aléatoire réelle finie Z est notée $E(Z)$ et sa variance $V(Z)$.

II.A – Étude de $E(|S_n|)$

II.A.1) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

II.A.2) Soit S et T deux variables aléatoires réelles finies indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que T et $-T$ ont même loi.
Montrer que $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))$.

II.A.3) On considère la fonction φ_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi_n(t) = E(\cos(S_n t))$ pour tout réel t.
Montrer que $\varphi_n(t) = (\cos t)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t.

II.A.4) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(|S_n|) = \frac{2}{\pi} u_n$.

On utilisera l'expression intégrale de la valeur absolue obtenue à la question I.A.5.

II.A.5)

En utilisant la question précédente et la formule de transfert, exprimer $\frac{2}{\pi}\left(u_{2n+2} - u_{2n+1}\right)$

En utilisant la formule des probabilités totales, déterminer une relation entre $P\left(S_{2n+2} = s\right)$, $P\left(S_{2n+1} = s-1\right)$ et $P\left(S_{2n+1} = s+1\right)$ pour $s \in [\![-2n-2, 2n+2]\!]$

En déduire $\frac{2}{\pi}\left(u_{2n+2} - u_{2n+1}\right)$ sous la forme d'une somme faisant intervenir $P\left(S_{2n+1} = s\right)$

En déduire $\frac{2}{\pi}\left(u_{2n+2} - u_{2n+1}\right) = P\left(S_{2n+1} = 0\right)$ puis conclure que $u_{2n+2} = u_{2n+1}$

II.B – Étude de $\frac{S_n}{n}$

On se propose de démontrer que la suite $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0, c'est-à-dire qu'il existe un événement négligeable $\mathcal{Z} \in \mathcal{A}$ tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z}, \quad \frac{S_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_n = \left(\frac{S_n}{n}\right)^4 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{Z}_n = \left\{\omega \in \Omega,\ \exists k \geqslant n,\ U_k(\omega) \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right\}$$

Z_n est donc l'évènement $(\exists k \geq n \quad U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}})$

II.B.1) Montrer que $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.B.2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(U_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{3}{n^{3/2}}$.

II.B.3)

Exprimer Z_n en fonction des évènements $U_k \geq \frac{1}{\sqrt{k}}$

Montrer que $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\lim_{n\to\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$.

II.B.4) On pose $\mathcal{Z} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_n$. Montrer que $\Omega \setminus Z = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{k\geq n} \left(\left|\frac{S_k}{k}\right| < \frac{1}{k^{1/8}} \right)$

En déduire que $\left(\frac{S_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers 0.

Problème 2 :

Dans tout ce problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et l'on note :
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ;
- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des éléments inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
- $\mathcal{X}_n$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont dans $\{0,1\}$;
- ${}^tM$ la transposée d'une matrice M, mais la notation M^T est également utilisable.

IV.A – *Génération par une colonne aléatoire*

Soit $p \in]0,1[$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p.

IV.A.1) Calculer la probabilité que $X_1, \ldots, X_n$ soient égales.

IV.A.2) Quelle est la loi de $S = X_1 + \ldots + X_n$? On attend une démonstration du résultat annoncé.

IV.A.3) Soient i et j dans $\{1, \ldots, n\}$. Donner la loi de la variable aléatoire $X_{i,j} = X_i \times X_j$

IV.A.4) Si $\omega \in \Omega$, on introduit la matrice colonne

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_n(\omega) \end{pmatrix}$$

et la matrice $M(\omega) = U(\omega)\,{}^t(U(\omega))$. L'application $M : \begin{cases} \Omega \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \omega \mapsto M(\omega) \end{cases}$ est ainsi une variable aléatoire.

a) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $M(\omega) \in \mathcal{X}_n$.

b) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $\mathrm{tr}(M(\omega)) \in \{0, \ldots, n\}$, et que $\mathrm{rg}(M(\omega)) \leqslant 1$.

c) Si $\omega \in \Omega$, justifier que $M(\omega)$ est une matrice de projection si et seulement si $S(\omega) \in \{0,1\}$.

IV.A.5) Donner la loi, l'espérance et la variance des variables aléatoires $\mathrm{tr}(M)$ et $\mathrm{rg}(M)$.

IV.A.6) Exprimer M^k en fonction de S et M.

Quelle est la probabilité pour que la suite de matrices $(M^k)_{k\in\mathbb{N}}$ soit convergente ?

Montrer que, dans ce cas, la limite est une matrice de projection.

IV.A.7) Quelle est la probabilité que M admette deux valeurs propres distinctes ?

IV.B – Génération par remplissage aléatoire

Soit $p \in]0,1[$. On part de la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notée M_0. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on construit la matrice M_{k+1} à partir de la matrice M_k de la manière suivante

— on parcourt en une vague la matrice et chaque coefficient nul est changé en 1 avec la probabilité p ;

— chaque action sur un coefficient est indépendante de ce qui se passe sur les autres et des vagues précédentes.

Les M_k sont donc des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X}_n$ et l'on considère qu'elles sont définies sur un espace probabilisé commun $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Voici un exemple de réalisation de cette évolution pour $n = 2$

$$M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \to M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour $k \geqslant 1$, le nombre de modifications réalisées lors de la k-ième vague est noté N_k. Dans l'exemple ci-dessus : $N_1 = 2$, $N_2 = 0$, $N_3 = 1$, $N_4 = 1$, $N_5 = 0$.

On s'intéresse au plus petit indice k pour lequel la matrice M_k ne comporte que des 1 ; on dit alors qu'elle est ***totalement remplie***. Dans l'exemple précédent, ce premier indice vaut 4.

On note $q = 1 - p$ et $m = n^2$.

IV.B.2) Donner la loi de N_1, puis la loi conditionnelle de N_2 sachant $(N_1 = i)$ pour i dans un ensemble à préciser. N_1 et N_2 sont-elles indépendantes ?

IV.B.3) Soient i et j dans $\{1, \dots, n\}$. Le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que le coefficient ligne i, colonne j de M_k vaut 1 est noté $T_{i,j}$ (dans l'exemple ci-dessus : $T_{1,1} = 1$ et $T_{1,2} = 3$). Donner la loi de $T_{i,j}$.

IV.B.4) Pour un entier $k \geqslant 1$, donner la valeur de $P(T_{i,j} \geqslant k)$

IV.B.5) Soient $r \geqslant 1$ un entier et $S_r = N_1 + \dots + N_r$. Que représente S_r ? Donner sa loi (on pourra utiliser la question précédente).

IV.B.6) On note N le plus petit indice k pour lequel la matrice M_k est totalement remplie.

[*a)* Proposer une démarche pour approcher l'espérance de N à l'aide d'une simulation informatique utilisant les fonctions précédentes.] ne pas rédiger cette question

b) Donner une expression de la valeur exacte de cette espérance faisant intervenir q et m.