

PC* Devoir Surveillé N°6 durée 4h Niveau X-ENS
--

NOTATIONS

Dans tout le problème, pour tout $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a \leq b$, on notera $[a, b] = \{i \in \mathbb{N} \mid a \leq i \leq b\}$ l'ensemble des entiers compris entre a et b .

Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ deux entiers strictement positifs. On note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels de taille $p \times q$ (p lignes et q colonnes). Lorsque $p = q$, on notera $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $p \times p$.

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $A^T \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ désignera la transposée de A . Un vecteur $u \in \mathbb{R}^p$ pourra être identifié à un vecteur colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et u^T sera le vecteur ligne associé de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$.

Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on note $A \odot B$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ définie pour tous $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$ par :

$$(A \odot B)_{ij} = A_{ij} B_{ij}$$

où pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, M_{ij} désigne le coefficient de la ligne i et de la colonne j .

Pour tout $A \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on définit $A^{(0)} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ la matrice telle que $A_{ij}^{(0)} = 1$ pour tous $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq q$ puis par récurrence, $A^{(n+1)} = A^{(n)} \odot A$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Enfin, on dira qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est symétrique positive si $A^T = A$ et $u^T A u \geq 0$ pour tout $u \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. L'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ sera noté $\text{Sym}^+(p)$.

DÉPENDANCES DES PARTIES

Les parties III et IV sont indépendantes des parties I et II et la partie V dépend des parties précédentes.

PARTIE I

- (1) Montrer que pour toutes matrices A et B dans $\text{Sym}^+(p)$ et tous réels positifs a et b , on a $aA + bB \in \text{Sym}^+(p)$
- (2) Montrer que si $v \in \mathbb{R}^p$ alors la matrice $A = (A_{ij})_{(i,j) \in [1,p]^2}$ définie par $A = vv^T$ est dans $\text{Sym}^+(p)$.
- (3) (a) Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^p$, on a $(uu^T) \odot (vv^T) = (u \odot v)(u \odot v)^T$.
 (b) Soit $A \in \text{Sym}^+(p)$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres (avec multiplicité) de A et $(u_1, \dots, u_p)$ une famille orthonormale de vecteurs propres associés. Montrer que $\lambda_k \geq 0$ pour tout $k \in [1, p]$ et que $A = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k u_k^T$.
 (c) En déduire que si $A, B \in \text{Sym}^+(p)$ alors $A \odot B \in \text{Sym}^+(p)$.

PARTIE II

Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on note $f[A] \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice définie par $f[A]_{ij} = f(A_{ij})$ pour tout $(i, j) \in [1, p]^2$.

- (4) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ où $a_k \geq 0$ pour tout $k \in [0, n]$ un polynôme à coefficients positifs.
 (a) Vérifier que $P[A] = \sum_{k=0}^n a_k A^{(k)}$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.
 (b) Montrer que si $A \in \text{Sym}^+(p)$ alors $P[A] \in \text{Sym}^+(p)$.

On pose, pour tout $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ où $k!$ désigne la factorielle de k .

(5) Soit $A \in \text{Sym}^+(p)$.

(a) Montrer que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n[A]_{ij} = \exp(A_{ij}).$$

(b) Montrer que $\exp[A] \in \text{Sym}^+(p)$.

(c) Soit $u \in \mathbb{R}^p$. Montrer que $\exp[A] \odot (uu^T) \in \text{Sym}^+(p)$.

(6) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On considère un p -uplet $(x_i)_{1 \leq i \leq p}$ d'éléments de $\mathbb{R}^d$ et la matrice

$$A = (\langle x_i, x_j \rangle)_{(i,j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2}$$

où $\langle a, b \rangle$ désigne le produit scalaire usuel entre deux vecteurs a et b de $\mathbb{R}^d$. On notera $|a| = \sqrt{\langle a, a \rangle}$ la norme de a .

(a) Montrer que $A \in \text{Sym}^+(p)$.

(b) On note $u \in \mathbb{R}^p$ le vecteur de coordonnées $(\exp(-\frac{|x_1|^2}{2}), \dots, \exp(-\frac{|x_p|^2}{2}))$. Montrer que $(\exp[A] \odot (uu^T))_{ij} = \exp(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2})$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$.

(c) Soient $\lambda > 0$ et $K \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ la matrice définie par $K_{ij} = \exp(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2\lambda})$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket^2$. Montrer que $K \in \text{Sym}^+(p)$.

PARTIE III

Soit $\lambda > 0$ fixé. On considère ici l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dans toute la suite, on désigne par $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (on ne demande pas de vérifier ce fait) défini par

$$\mathcal{E} = \{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists (a, A) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \text{ tel que } \forall y \in \mathbb{R} \ |f(y)| \leq A \exp(-y^2/a) \}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\tau_x : \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'application définie pour tout $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par

$$\tau_x(f)(y) = f(y - x)$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$. Enfin on définit la fonction $\gamma_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\gamma_\lambda(y) = \exp(-y^2/\lambda).$$

(7) Pour tout $(f, g) \in \mathcal{E}^2$, montrer que fg est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour tous $f, g \in \mathcal{E}$, on définit

$$(f | g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(y)dy.$$

(8) (a) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{E}$, on a $(f | f) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $f = 0$.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tau_x(\gamma_\lambda)$ appartient à $\mathcal{E}$.

(9) (a) Soit $a > 0$. Montrer qu'il existe $c \geq 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{a}\right) dy = c \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right).$$

Indication : On pourra montrer l'égalité

$$\frac{(y-x)^2}{\lambda} + \frac{y^2}{a} = \frac{a+\lambda}{a\lambda} \left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2 + \frac{x^2}{a+\lambda}.$$

- (b) Soit $g \in \mathcal{E}$. On considère $C(g) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$C(g)(x) = (\tau_x(\gamma_\lambda) | g).$$

Montrer que $C(g) \in \mathcal{E}$.

- (c) Montrer que $C : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ définit un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

PARTIE IV

Soit $\lambda > 0$ fixé. On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{G}$ des fonctions g s'écrivant sous la forme $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda)$ où n est un entier strictement positif et $((x_i, \alpha_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{G} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda) \mid n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in [1, n] (x_i, \alpha_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \right\}.$$

On notera $\mathcal{H} = C(\mathcal{G})$ l'image de $\mathcal{G}$ par l'endomorphisme C introduit dans la question (9b).

- (10) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ et que c'est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$ qui contient toutes les fonctions $\tau_x(\gamma_\lambda)$ pour $x \in \mathbb{R}$ arbitraire.

- (11) (a) Montrer qu'il existe $c_\lambda > 0$ telle que pour tout $(x, x') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on a

$$(\tau_x(\gamma_\lambda) | \tau_{x'}(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \gamma_{2\lambda}(x - x').$$

Indication : On pourra remarquer que $\frac{1}{\lambda}((y-x)^2 + (y-x')^2) = \frac{2}{\lambda}(y - (x+x')/2)^2 + \frac{1}{2\lambda}(x' - x)^2$.

- (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$C(\tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})$$

et que

$$\mathcal{H} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \mid n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in [1, n] (x_i, \alpha_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \right\}.$$

- (12) (a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de réels telle que pour tous $i, j \in [1, n]$ on a $x_i \neq x_j$ lorsque $i \neq j$. Montrer que la fonction $\sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$ est nulle si et seulement si $\alpha_i = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$ (*Indication : On pourra procéder par récurrence sur n*).

- (b) En déduire qu'il existe une unique application linéaire D de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{G}$ telle que $D \circ C(g) = g$ pour tout $g \in \mathcal{G}$ et $C \circ D(h) = h$ pour tout $h \in \mathcal{H}$.

- (c) Montrer que pour tout $h \in \mathcal{H}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ que $h(x) = (\tau_x(\gamma_\lambda) | D(h))$.

- (13) Pour tout $(h_1, h_2) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$, on note $(h_1 | h_2)_\mathcal{H} = c_\lambda (D(h_1) | D(h_2))$ où c_λ est introduit dans la question (11a).

- (a) Vérifier que $(|)_\mathcal{H}$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{H}$.

- (b) Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathcal{H}$ on a $h(x) = (\tau_x(\gamma_{2\lambda}) | h)_\mathcal{H}$.

- (c) Montrer que pour tout $h \in \mathcal{H}$ on a

$$\|h\|_\infty \leq \|h\|_\mathcal{H}$$

où on a posé $\|h\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h(x)|$ et $\|h\|_\mathcal{H} = (h | h)_\mathcal{H}^{1/2}$.

PARTIE V

On fixe dans cette partie deux p -uplets $(x_i)_{i \in [1, p]}$ et $(a_i)_{i \in [1, p]}$ de réels. On suppose que les x_i sont deux à deux distincts. On note $\mathcal{S} = \{ h \in \mathcal{H} \mid h(x_i) = a_i \}$ l'ensemble des $h \in \mathcal{H}$ qui valent a_i en x_i pour tout $i \in [1, p]$ (on dira qu'une telle fonction est une interpolante). On note $J : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ défini par $J(h) = \frac{1}{2} \|h\|_{\mathcal{H}}^2$ et $J_* = \inf \{ J(h) \mid h \in \mathcal{S} \}$.

On veut montrer dans cette partie qu'il existe une unique interpolante $h_* \in \mathcal{S}$ qui atteint le minimum de J c'est-à-dire telle que $J(h_*) = J_*$. On notera $\mathcal{S}_* = \{ h \in \mathcal{S} \mid J(h) = J_* \}$.

(14) Montrer $\mathcal{S}_*$ a au plus un élément.

(15) Soient $\mathcal{H}_0 = \{ h \in \mathcal{H} \mid h(x_i) = 0 \forall i \in [1, p] \}$ et $\tilde{h} \in \mathcal{S}_*$ (on suppose ici $\mathcal{S}_*$ non vide).

Montrer que $(\tilde{h} \mid h_0)_{\mathcal{H}} = 0$ pour tout $h_0 \in \mathcal{H}_0$.

(16) On note $\mathcal{H}_0^\perp = \{ h \in \mathcal{H} \mid \forall h_0 \in \mathcal{H}_0 (h \mid h_0)_{\mathcal{H}} = 0 \}$ le sous-espace orthogonal à $\mathcal{H}_0$ dans $\mathcal{H}$.

(a) Montrer que $\mathcal{S}_* = \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$.

(b) Montrer que $\mathcal{H}_0^\perp$ contient le sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}$ engendré par les fonctions $\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$ pour $i \in [1, p]$.

(17) Soient $\alpha \in \mathbb{R}^p$ (resp. $a \in \mathbb{R}^p$) le vecteur de coordonnées $(\alpha_i)_{i \in [1, p]}$ (resp. $(a_i)_{i \in [1, p]}$) et $h_\alpha = \sum_{i=1}^p \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$.

(a) Montrer que h_α est une interpolante si et seulement si $K\alpha = a$ où K est la matrice introduite dans la question (6) (ici dans le cas $d = 1$).

(b) Montrer que K est inversible.

(18) En déduire qu'il existe $\alpha_* \in \mathbb{R}^p$ tel que $\mathcal{S}_* = \{h_{\alpha_*}\}$ et calculer la valeur de J_* en fonction de K et a .