

PC*	Devoir Maison N°1
------------	--------------------------

Problème : Intégrales de Wallis et formule de Stirling

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale de Wallis d'ordre n par $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$

1) Formule explicite :

a) Donner la valeur de W_0 et W_1 puis montrer que pour $n \geq 1$, on a $W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1}$

b) En déduire que $\forall p \in \mathbb{N} \quad W_{2p} = \frac{(2p)! \pi}{2^{2p+1} (p!)^2}$

2) Equivalent :

a) Montrer que la suite $(n W_{n-1} W_n)_{n \geq 1}$ est constante. Que peut-on en déduire sur $W_n W_{n-1}$?

b) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N} \quad W_n > 0$

c) Montrer que $\forall n \geq 1 \quad W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}$, en déduire que pour $n \rightarrow +\infty \quad W_n \sim W_{n-1}$

d) Démontrer que pour $n \rightarrow +\infty$, $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{\alpha n}}$ avec α un réel strictement positif à déterminer.

Dans la suite du texte, on cherche à établir la formule de Stirling. Pour cela on pose

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi}}$$

3) a) Montrer que $\ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) \sim -\frac{1}{12n^2}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

b) En déduire la convergence de la série $\sum \ln \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ puis la convergence de la suite $(\ln u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

c) En déduire qu'il existe une constante L telle qu'on ait $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi} e^L$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

d) En utilisant la question 1)b), en déduire un équivalent de W_{2n} à l'aide de e^L

e) En utilisant l'équivalent de W_n obtenu dans la question 2), déterminer la valeur de e^L et établir la formule de Stirling.

On va affiner la formule de Stirling

4) Considérons $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle strictement positive telles que

$a_n \sim b_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ et supposons que la série $\sum b_n$ converge.

Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier naturel non nul n_0 tel que $\forall n \geq n_0 \quad (1-\varepsilon)b_n \leq a_n \leq (1+\varepsilon)b_n$. En déduire que la série $\sum a_n$ converge et que les restes

vérifient $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

- 5) En utilisant un encadrement par des intégrales, déterminer un équivalent simple de $\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ lorsque

$n \rightarrow +\infty$ et en déduire un équivalent de $\sum_{k=n}^{+\infty} \ln\left(\frac{u_k}{u_{k+1}}\right)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$

- 6) En déduire que pour $n \rightarrow +\infty$, $n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Exercice:

Soit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt$. On posera aussi $g(t) = \frac{1}{\sqrt{t} \ln t}$

- 1) Montrer que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$
- 2) Montrer que f est dérivable sur son domaine de définition, calculer sa dérivée et tracer son tableau de variations
- 3) Pour $x > 1$ et $t \in [x, x^2]$, encadrer $g(t)$ et en déduire un encadrement de $f(x)$. Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 4) Pour $x < 1$ et $t \in [x^2, x]$, encadrer $g(t)$ et en déduire un encadrement de $f(x)$. Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- 5) Posons $h(x) = f(x) - \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$. Montrer que $h(x) = \int_{x-1}^{x^2-1} k(u) du$ avec $k(u)$ à préciser.

Déterminer un équivalent de $k(u)$ lorsque $u \rightarrow 0$. En déduire que k est bornée au voisinage de 0 et que

$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 0$. En déduire $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.