

PC* Devoir Maison N°2

Exercice 1

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout λ réel, on pose $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t} dt$, lorsque cela existe.

1. Dans cette question, et uniquement cette question, f est la fonction $t \mapsto \cos\left(\frac{t}{1+t^2}\right)$.

1.1. En utilisant un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$, donner un équivalent de $\lambda - f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

1.2. En déduire l'ensemble des valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.

1.3. Donner alors un équivalent de $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$ lorsque x tend vers l'infini.

2. On suppose qu'il existe λ et μ deux réels pour lesquels $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Prouver que l'on a : $\lambda = \mu$.

3. Pour tout x réel, on pose $H_\lambda(x) = \int_a^x (\lambda - f(t)) dt$.

3.1. Justifier que H_λ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser $H'_\lambda(x)$.

3.2. Démontrer que si H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $I(\lambda)$ existe et que $I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2} dt$.

4. Désormais on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et T -périodique ($T > 0$).

4.1. Démontrer que la fonction φ qui à tout réel x associe $\varphi(x) = \int_x^{x+T} f(t) dt$ est constante.

Montrer alors que l'on a, pour tout réel x : $H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \int_0^T f(t) dt$.

4.2. Montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour laquelle la suite $(H_\lambda(a + nT))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

4.3. Prouver que, dans ce cas, la fonction H_λ est périodique et bornée dans $\mathbb{R}$.

4.4. Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ converge.

4.5. Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\int_a^x \frac{f(t)}{t} dt$ lorsque x tend vers l'infini.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)} dt$ et $B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t} dt$.

5.1. Prouver que A_n existe. On admettra qu'il en est de même pour B_n .

5.2. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$.

5.3. Démontrer que la suite $(A_n - B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

5.4. On effectue dans B_n le changement de variable $u = nt$.

i. Donner un équivalent de B_n lorsque n tend vers l'infini. On pourra utiliser les résultats établis à la question 4.

ii. En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \int_0^1 P(t) dt$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (1, X-1, X(X-1), \dots, X^{n-1}(X-1))$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Généralités sur φ .

2.1. Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2.2. Déterminer $\text{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ .

Montrer que $\mathbb{R}_n[X] = \text{Im } \varphi \oplus \text{Ker } \varphi$

3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t) dt.$$

3.1. Justifier que l'application ψ est linéaire.

3.2. Démontrer que $\text{Im}(\psi) = \text{Vect}(X, X^2, \dots, X^{n+1})$.

3.3. Démontrer que : $P \in \text{Ker}(\varphi) \Leftrightarrow \psi(P) \in \text{Vect}(X(X-1), \dots, X^n(X-1))$.

3.4. Donner alors une base de $\text{Ker}(\varphi)$.

4. On note $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

4.1. Donner la dimension de $\mathcal{H}$.

4.2. Pour $k \in [0, n]$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\frac{P^{(k)}(0)}{k!}$.
Démontrer que la famille $(\psi_0, \dots, \psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.

4.3. Déterminer les composantes de φ dans cette base.