

PC* Devoir Maison N° 3**Problème 1 :**

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit qu'une matrice $R \in M_n(\mathbb{R})$ est une racine carrée de A ssi $R^2 = A$.

Dans ce problème, nous constaterons que certaines matrices admettent une racine carrée (et même parfois une infinité) et d'autres n'en admettent pas.

Partie I :

- 1) Soit R une racine carrée de A . Montrer que A et R commutent ($AR = RA$)
- 2) Soient $(A, A') \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ des matrices semblables. Montrer que :
 A admet une racine carrée $\Leftrightarrow A'$ admet une racine carrée
- 3) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Soit D une matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont positifs ou nuls et qui est semblable à A . Montrer que A admet une racine carrée (on explicitera la forme de cette racine carrée)

Partie II : Etude d'exemples

Soit $a \in \mathbb{R}$ $M_a = \begin{pmatrix} 1 & 1-4a & -1+4a \\ -3a & -1+2a & 2+a \\ -3a & -2-a & 3+4a \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

$B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f_a \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que $\text{Mat}_B(f_a) = M_a$

- 1) Calculer sous forme factorisée $P(\lambda) = \det(\lambda \text{Id} - f_a)$. Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles $P(\lambda) = 0$. (on doit trouver 1 et $1+3a$). Montrer que $e_1 + e_2 + e_3 \in \text{Ker}(f_a - \text{Id})$. Déterminer la dimension de $\text{Ker}(f_a - (1+3a)\text{Id})$ et de $\text{Ker}(f_a - \text{Id})$.

2) Dans cette question, on suppose $a = 1$. $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 7 \end{pmatrix}$

a) Montrer que M_1 est semblable à $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Quelle est la relation entre D et M_1 ? (on explicitera la matrice de passage). En déduire une façon de trouver une racine carrée particulière de M_1 (le calcul effectif n'est pas demandé).

- b) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ admet une infinité de racines carrées dans $M_2(\mathbb{R})$ (indication : chercher les racines carrées triangulaires supérieures)

- c) En déduire que M_1 admet une infinité de racines carrées dans $M_3(\mathbb{R})$

3) Dans cette question, on suppose $a = -\frac{1}{3}$. $M_{-1/3} = \begin{pmatrix} 1 & 7/3 & -7/3 \\ 1 & -5/3 & 5/3 \\ 1 & -5/3 & 5/3 \end{pmatrix}$

- a) Montrer que $M_{-1/3}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (préciser la relation de changement de bases)
- d) Déterminer toutes les matrices commutant avec T .
- e) Montrer que T ne possède pas de racine carrée dans $M_3(\mathbb{R})$.
- f) $M_{-1/3}$ possède-t-elle une racine carrée dans $M_3(\mathbb{R})$?

Problème 2 :

- 1) Soit $u \in L(\mathbb{R}^n)$. Montrer que, si $\forall x \in \mathbb{R}^n$ x et $u(x)$ sont liés, alors u est une homothétie. (on pourra introduire une base de $\mathbb{R}^n$)
- 2) Supposons $u \in L(\mathbb{R}^n)$, $\text{tr}(u) = 0$ et $u \neq 0$. Justifier l'existence d'un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ tel que x et $u(x)$ soient indépendants, ainsi que celle de F , un supplémentaire dans $\mathbb{R}^n$ de $\text{Vect}(x)$ contenant le vecteur $u(x)$.
- 3) Dans cette question uniquement $n = 2$. Soit $u \in L(\mathbb{R}^2)$, $\text{tr}(u) = 0$ et $u \neq 0$. Soit $x \in \mathbb{R}^2$ tel que x et $u(x)$ soient indépendants. Montrer que la matrice de u dans la base $(x, u(x))$ est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- 4) On veut montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle (ayant tous les coefficients de la diagonale égaux à 0)

Soit la propriété au rang n : une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Montrer que la propriété est vraie au rang 1 et 2

Supposons la propriété au rang n . On considère une matrice $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$, $A \neq 0$ telle que $\text{tr} A = 0$ et f l'endomorphisme canoniquement associé. Justifier l'existence d'une base B' de $\mathbb{R}^{n+1}$ telle que $\text{Mat}_{B'}(f)$ soit

de la forme $A' = \text{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & * & \dots & * \\ 1 & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ A'' \\ \\ \end{matrix}$. Quelle est la trace de A'' ? Montrer que A' est semblable à une

matrice de diagonale nulle (on pourra penser à utiliser une matrice de passage de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$ avec

$P \in GL_n(\mathbb{R})$). En déduire la propriété au rang $n+1$ et conclure.

- 5) a) Soit une matrice diagonale de $M_n(\mathbb{R})$: $D = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ avec les α_i distincts à 2 à 2.

Montrer que l'application $\varphi : M \mapsto DM - MD$ est un endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\text{Ker} \varphi$ et $\dim \text{Ker} \varphi$. Que vaut $\dim \text{Im} \varphi$?

- b) En déduire que $\text{Im} \varphi$ est l'ensemble des matrices dont les coefficients diagonaux sont nuls.

- 6) Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice de trace nulle, alors il existe deux matrices B et C de $M_n(\mathbb{R})$ telles que $A = BC - CB$