

PC*	Devoir Maison N° 4
------------	---------------------------

Autour des matrices de Toeplitz

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, n un entier naturel supérieur ou égal à 2, $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité. Si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a \leq b$, $\llbracket a, b \rrbracket$ désigne l'ensemble $\{a, a+1, \dots, b-1, b\}$. $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. L'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si $(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}$, on note $T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1})$ la matrice

$$T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \ddots & & \vdots \\ t_{-2} & t_{-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 & t_2 \\ \vdots & & \ddots & t_{-1} & t_0 & t_1 \\ t_{-n+1} & \cdots & \cdots & t_{-2} & t_{-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

Une telle matrice est appelée *matrice de Toeplitz* d'ordre n . On nomme $\text{Toep}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de Toeplitz d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\text{Toep}_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \exists (t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{K}^{2n-1}, M = T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-1})\}$$

Une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $N^p = 0$. On admettra qu'une telle matrice vérifie $N^n = 0$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique défini par $\chi_M(X) = \det(XI_n - M)$. Si $P = a_0 + a_1X + \dots + a_pX^p$ ($p \in \mathbb{N}$) est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, $P(M)$ désigne la matrice

$$P(M) = a_0I_n + a_1M + \dots + a_pM^p$$

Le but de ce problème est l'étude de certaines propriétés des matrices de Toeplitz. La partie I traite de généralités sur les matrices de Toeplitz et de quelques exemples. La partie II, indépendante de la partie I, étudie un type particulier de matrices de Toeplitz — les matrices circulantes — en s'intéressant à leur structure et à leur diagonalisabilité. Enfin, la partie III, indépendante des précédentes, aborde l'étude des matrices cycliques et les relie aux matrices de Toeplitz.

I Généralités et quelques exemples

I.A — Généralités

Q 1. Montrer que $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. En donner une base et en préciser la dimension.

Q 2. Montrer que si deux matrices A et B commutent ($AB = BA$) et si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, alors $P(A)$ et $Q(B)$ commutent.

I.B — Cas de la dimension 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ une matrice de Toeplitz de taille 2×2 , où (a, b, c) sont des complexes.

Q 3. Donner le polynôme caractéristique de A .

Q 4. Discuter, en fonction des valeurs de (a, b, c) , de la diagonalisabilité de A .

Réduction d'une matrice sous forme de Toeplitz

Q 5. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que M est semblable à une matrice de type $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ ou de type $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$, où α, β et γ sont des complexes avec $\alpha \neq \beta$.

Q 6. En déduire que toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de Toeplitz.

II Matrices circulantes

Une matrice *circulante* est une matrice de Toeplitz $T(t_{-n+1}, \dots, t_0, \dots, t_{n-2}, t_{n-1})$, pour laquelle

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \quad t_k = t_{-n+k}$$

Elle est donc de la forme

$$T(t_1, t_2, \dots, t_0, t_1, \dots, t_{n-2}, t_{n-1}) = \begin{pmatrix} t_0 & t_1 & \dots & t_{n-2} & t_{n-1} \\ t_{n-1} & t_0 & \ddots & & \\ t_{n-2} & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & t_1 \\ t_1 & \dots & t_{n-2} & t_{n-1} & t_0 \end{pmatrix}$$

On pose $M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$ et $\omega_n = e^{2i\pi/n}$.

Q 14. Calculer $M_n^2, \dots, M_n^n$. Montrer que M_n est inversible et donner un polynôme annulateur de M_n .

Q 15. Justifier que M_n est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres (exprimées à l'aide de ω_n) et donner une base de vecteurs propres de M_n .

Q 16. On pose $\Phi_n = (\omega_n^{(p-1)(q-1)})_{1 \leq p, q \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que Φ_n est inversible et donner sans calcul la valeur de la matrice $\Phi_n^{-1} M_n \Phi_n$.

Q 17. Soit A une matrice circulante. Donner un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $A = P(M_n)$.

Q 18. Réciproquement, si $P \in \mathbb{C}[X]$, montrer, à l'aide d'une division euclidienne de P par un polynôme bien choisi, que $P(M_n)$ est une matrice circulante.

Q 19. Montrer que l'ensemble des matrices circulantes est un sous-espace vectoriel de $\text{Toep}_n(\mathbb{C})$, stable par produit et par transposition.

Q 20. Montrer que toute matrice circulante est diagonalisable. Préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.

III Étude des matrices cycliques

III.A – Endomorphismes et matrices cycliques

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à M .

Q 21. Montrer que si M est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors les propositions suivantes sont équivalentes :

- il existe x_0 dans $\mathbb{C}^n$ tel que $(x_0, f_M(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0))$ est une base de $\mathbb{C}^n$;
- M est semblable à la matrice $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ définie par

$$C(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

où $(a_0, \dots, a_{n-1})$ sont des nombres complexes.

On dit alors que f_M est un endomorphisme cyclique, que M est une matrice cyclique et que x_0 est un vecteur cyclique de f_M .

III.A.1) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que f_M est diagonalisable. On note $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ses valeurs propres (non nécessairement distinctes) et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs associée à ces valeurs propres. Soit

$u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ un vecteur de $\mathbb{C}^n$ où $(u_1, \dots, u_n)$ sont n nombres complexes.

Q 22. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $(u_1, \dots, u_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ pour que $(u, f_M(u), \dots, f_M^{n-1}(u))$ soit une base de $\mathbb{C}^n$.

Q 23. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique. Caractériser alors ses vecteurs cycliques.

III.A.2) Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On s'intéresse aux éléments propres de la matrice $C(a_0, \dots, a_{n-1})$.

Q 24. Soit λ un nombre complexe. En discutant dans $\mathbb{C}^n$ du système $C(a_0, \dots, a_{n-1})X = \lambda X$, montrer que λ est une valeur propre de $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ si et seulement si λ est racine d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ à préciser.

Q 25. Si λ est racine de ce polynôme, déterminer le sous-espace propre de $C(a_0, \dots, a_{n-1})$ associé à la valeur propre λ et préciser sa dimension.

Q 26. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice cyclique soit diagonalisable.

III.A.3) Commutant d'un endomorphisme cyclique

Soient M une matrice cyclique et x_0 un vecteur cyclique de f_M . On cherche à montrer que l'ensemble

$$\mathcal{C}(f_M) = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \mid f_M \circ g = g \circ f_M\}$$

est l'ensemble des polynômes en f_M .

Q 27. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $P(f_M) \in \mathcal{C}(f_M)$.

Q 28. Soit $g \in \mathcal{C}(f_M)$. Montrer qu'il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$ tels que $g = \alpha_0 Id_{\mathbb{C}^n} + \alpha_1 f_M + \dots + \alpha_{n-1} f_M^{n-1}$.

On pourra utiliser la base $(x_0, f_M(x_0), \dots, f_M^{n-1}(x_0))$ et exprimer $g(x_0)$ dans cette base.

Q 29. Conclure.

III.A.4) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Q 30. Donner les valeurs propres de N et les sous-espaces propres associés. Est-elle diagonalisable ?

Q 31. La matrice N est-elle cyclique ?

Q 32. Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec N est l'ensemble des matrices de Toeplitz triangulaires inférieures.