

PC*	Devoir Maison N° 5
------------	---------------------------

On travaille dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, qui est l'espace vectoriel de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$; on notera aussi $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^p(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) le sous-espace vectoriel des fonctions continues (resp. de classes $\mathcal{C}^p$, $\mathcal{C}^\infty$) à valeurs complexes. Pour toute fonction $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ et tout réel x , on pose

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t) dt, \quad \text{lorsque cette quantité a un sens.}$$

Quand elle est définie, La fonction $\hat{f}$ s'appelle la transformée de FOURIER de f .

I. ÉTUDE D'UN EXEMPLE

1. Soient x et α deux réels strictement positifs.

- (a) Justifier l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t}}{t}$ sur l'intervalle $]0, \alpha]$.
- (b) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $[x, +\infty[$.

2. Dans la suite, φ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

- (a) Montrer que, pour tout réel strictement positif x , $0 < \varphi(x) < \frac{e^{-x}}{x}$.
- (b) Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de φ' .
- (c) Montrer que, lorsque x tend vers 0^+ , $\varphi(x) + \ln x$ tend vers

$$C = \varphi(1) - \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt.$$

(on pourra exprimer $\ln x$ sous forme d'une intégrale.)

- (d) Montrer que, pour tout $x > 0$,
- $$\varphi(x) + \ln x = C + \int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt, \quad \text{et en déduire que}$$

$$\varphi(x) + \ln x = C + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k \cdot k!}.$$

3. Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \varphi(|x|).$$

- (a) Montrer que ψ est intégrable sur les deux intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
- (b) Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\hat{\psi}(x)$ a un sens et que

$$\hat{\psi}(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) \cos(xt) dt.$$

- (c) Montrer que $\hat{\psi}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées successives sous forme d'intégrales.

- (d) Montrer que, pour tout réel non nul x , on a $\hat{\psi}(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt) dt$, et calculer $\hat{\psi}(0)$.

4. (a) Montrer que la fonction $\Phi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \sin(xt) dt$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer

$\Phi'(x)$, pour tout $x > 0$, puis l'exprimer sans utiliser le signe intégrale.

- (b) En déduire soigneusement que pour tout réel non nul x , $\widehat{\psi}(x) = \frac{\arctan x}{x}$.

II. QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE FONCTION

1. Transformée de Fourier d'une fonction intégrable

- (a) Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$; montrer que pour tout réel x , $\widehat{f}(x)$ est bien définie et que la fonction $\widehat{f}$ est bornée.
(b) Si en plus f est continue, montrer que $\widehat{f}$ est aussi continue.

2. Transformations

- (a) Montrer que l'application $F : \varphi \mapsto \widehat{\varphi}$, définie sur l'espace vectoriel des fonctions complexes continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, à valeur dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, est linéaire.
Dans la suite de cette question, f est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.
(b) Vérifier que pour tout réel a , les fonctions $f_a : t \mapsto f(t-a)$ et ${}_af : t \mapsto f(at)$ possèdent des transformées de Fourier et montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}_a(x) = e^{-iax} \widehat{f}(x) \quad \text{et} \quad \widehat{{}_af}(x) = \frac{1}{|a|} \widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right) \quad (a \neq 0).$$

- (c) Exprimer de même la transformée de Fourier de l'application $t \mapsto f(t)e^{iat}$ en fonction de celle de f .
(d) Si f est paire (resp. impaire), donner une expression de sa transformée de Fourier sous forme d'une intégrale sur $[0, +\infty[$.
(e) Que peut-on alors dire de la transformée de Fourier d'une fonction réelle et paire (resp. impaire).

3. Dérivation

On considère un élément f de $C^1(\mathbb{R})$; on suppose que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

- (a) Montrer que f tend vers 0 en $\pm\infty$.
(b) Montrer alors que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}'(x) = ix\widehat{f}(x),$$

puis en déduire que $\widehat{f}$ tend vers 0 en $\pm\infty$.

- (c) On suppose de plus que l'application $g : t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$; montrer que $\widehat{f}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\widehat{f})'(x) = -i\widehat{g}(x).$$

III. UNE FORMULE D'INVERSION

A- Un autre exemple

Dans cette section, h désigne la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$; on admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = \sqrt{\pi}$.

1. Vérifier que $\widehat{h}$ est bien définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle satisfait l'équation différentielle

$$y' + \frac{x}{2}y = 0. \quad (1)$$

2. Résoudre l'équation différentielle (1) et donner l'expression de $\widehat{h}$.

3. Donner alors l'expression de la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto e^{-\varepsilon t^2}$, $\varepsilon > 0$.