PC* Devoir Maison N° 6 CCINP

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On note $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.
On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \phi(P) = (X^2 - 1)P'' + 2XP'.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $U_n = (X^2-1)^n$ et $L_n = \dfrac{1}{2^n n!}U_n^{(n)}$. Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*. Pour n entier naturel, a_n désigne le coefficient dominant de L_n.

Partie I - Quelques résultats généraux

Q1. Déterminer L_0, L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}(3X^2 - 1)$.

Dans la suite de cette partie, n désigne un entier naturel.

Q2. Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.

Q3. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Q4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1, 1[$ et un réel λ, que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

$$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$

On pourra utiliser le théorème de Rolle.

Q5. Dans cette question seulement, $n \geq 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1, 1[$ et un réel μ tels que :

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$

Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1, 1[$ et un réel ν tels que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

Q6. En déduire que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, L_n admet n racines réelles simples, toutes dans $[-1, 1]$. On les note $x_1, \dots, x_n$, en convenant que $x_1 < \cdots < x_n$.

$$\text{On note } A_n = \prod_{k=1}^{n}(X - x_k).$$

En convenant que $A_0 = 1$, on a donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $L_n = a_n A_n$.

Partie II - Étude des éléments propres de l'endomorphisme ϕ

Q7. Prouver que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Dans les questions **Q8** à **Q13**, n désigne un entier naturel.

Q8. Justifier que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ.

On note ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par ϕ. Cet endomorphisme ϕ_n est donc défini par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi_n(P) = \phi(P)$.

Q9. On note $M = (m_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de ϕ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrer que M est triangulaire supérieure et que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $m_{k,k} = k(k+1)$.

Q10. Montrer que ϕ_n est diagonalisable.

Q11. Vérifier que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(X^2-1)U_k' - 2kXU_k = 0$.

Q12. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En dérivant $(k+1)$ fois la relation de la question **Q11**, montrer grâce à la formule de dérivation de Leibniz que : $(X^2-1)U_k^{(k+2)} + 2XU_k^{(k+1)} - k(k+1)U_k^{(k)} = 0$.

Q13. Montrer que, pour $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme L_k est un vecteur propre de ϕ_n, en précisant la valeur propre associée.

Q14. Déduire de ce qui précède les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de ϕ.

Dans la suite du problème, pour P et Q éléments de $\mathbb{R}[X]$, on définit :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Partie III - Distance au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$

Q15. Justifier que $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

On note $\|.\|$ la norme associée, qui est donc définie par : $\|f\| = \left(\int_{-1}^{1} f(t)^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$.

Q16. Établir que : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $\langle \phi(P), Q\rangle = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)P'(t)Q'(t)\,\mathrm{d}t$, puis que :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ \langle \phi(P), Q\rangle = \langle P, \phi(Q)\rangle.$$

Q17. Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ est orthogonale pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle$. *On pourra utiliser la question* **Q13**.

Q18. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\langle P, L_n\rangle = 0$.

Q19. On admet que $\|L_n\|^2 = \dfrac{2}{2n+1}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $Q_n = \sqrt{\dfrac{2n+1}{2}}L_n$. Que peut-on dire de la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle$?

Dans la suite de cette partie, P désigne un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathrm{d}(P, \mathbb{R}_n[X]) = \inf\limits_{Q\in\mathbb{R}_n[X]} \|P - Q\|$ la distance de P au sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$.

Q20. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant un résultat de votre cours, justifier qu'il existe un unique polynôme T_n de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que : $\mathrm{d}(P, \mathbb{R}_n[X]) = \|P - T_n\|$, puis justifier l'égalité :

$$\mathrm{d}(P, \mathbb{R}_n[X])^2 = \|P\|^2 - \sum_{k=0}^{n}\left(c_k(P)\right)^2, \text{ où } c_k(P) = \langle P, Q_k\rangle.$$

Q21. Prouver que la série $\sum \left(c_k(P)\right)^2$ converge et que : $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\left(c_k(P)\right)^2 \leqslant \|P\|^2$.

Partie IV - Fonction génératrice

On admet dans la suite du problème que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)L_{n+1} - (2n+1)XL_n + nL_{n-1} = 0$ et on considère la série entière de la variable t : $\sum L_n(x)t^n$. On note r la racine positive du polynôme $X^2 - 2X - 1$.

Q22. Montrer que : $\forall x \in [-1, 1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|L_n(x)| \leqslant r^n$. *On pourra raisonner par récurrence et utiliser la relation admise au début de cette partie.*

Q23. Pour $x \in [-1, 1]$, on note $R(x)$ le rayon de convergence de la série entière $\sum L_n(x)t^n$. Montrer que : $R(x) \geqslant \dfrac{1}{r}$.

Q24. Pour $x \in [-1, 1]$ et $t \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$, on pose $S_x(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n$. Montrer que S_x est solution sur $\left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$(1 - 2tx + t^2)y' + (t - x)y = 0.$$

Q25. En déduire que : $\forall x \in [-1, 1]$, $\forall t \in \left]-\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r}\right[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} L_n(x)t^n = \dfrac{1}{\sqrt{t^2 - 2xt + 1}}$.

Q26. Indiquer une méthode permettant, à partir du seul résultat de la question **Q25**, de retrouver l'expression des polynômes L_0, L_1 et L_2.