

PC*

Devoir Maison N° 6 X-ENS

Notations

Pour n et k entiers strictement positifs, on notera $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices réelles à n lignes et k colonnes. On notera également $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des

matrices carrées de taille n . On notera tM la transposée d'une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$. On identifiera l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ à l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ des matrices colonnes à n coordonnées. En particulier, l'espace vectoriel des nombres réels est identifié à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

On étend les notations précédentes aux parties de $\mathbb{R}$: si K est une partie de $\mathbb{R}$, on notera par exemple $\mathcal{M}_{n,k}(K)$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$ constituée des matrices dont tous les coefficients sont à valeurs dans K . Le sujet s'intéressera tout particulièrement à $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, l'ensemble des matrices carrées de taille n dont tous les coefficients sont égaux à 1 ou à -1. Si $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, on notera

$$\begin{aligned} S(A) &:= \{ {}^tXAY \mid (X, Y) \in (\{-1, 1\}^n)^2 \}, \\ M(A) &:= \max S(A). \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} X \text{ et } Y \text{ sont} \\ \text{des matrices} \\ \text{colonnes dont} \\ \text{les coeff valent} \\ 1 \text{ ou } -1 \end{array} \right)$$

Pour $n \geq 1$, on notera également

$$\underline{M}(n) := \min \{ M(A), A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\}) \}.$$

Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires intervenant dans les parties II et III. On admettra que toutes les variables aléatoires introduites peuvent bien être construites sur cet espace. On notera $\mathbb{P}(E)$ la probabilité d'un événement $E \subset \Omega$, et $\mathbb{E}[X]$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs réelles.

Partie I

1. Quel est le cardinal de $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$? Cet ensemble est-il un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?
2. Montrer que pour toute matrice A dans $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, l'ensemble $S(A)$ est inclus dans $\{-n^2, \dots, n^2\}$. Montrer que l'inclusion est stricte (on pourra penser à un argument de parité), et montrer que $S(A)$ est un ensemble symétrique, au sens où un entier k est dans $S(A)$ si et seulement si $-k$ est dans $S(A)$.
3. Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$. On suppose qu'il existe des matrices diagonales C et D ne contenant que des 1 et des -1 sur la diagonale, telles que $B = CAD$. Montrer que $S(A) = S(B)$.
4. Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$, et on note

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer $S(I)$ et $S(J)$, et en déduire $S(A)$ pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\{-1, 1\})$.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :
- (a) $n^2 \in S(A)$.
 - (b) Il existe X et Y dans $\{-1, 1\}^n$ tels que $A = X^t Y$.
 - (c) A est une matrice de rang 1.
6. En déduire la proportion, parmi les matrices de $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, des matrices A qui vérifient $n^2 \in S(A)$.

Partie II

Soit k un entier strictement positif et $U_1, \dots, U_k$ une suite de k variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes et de loi uniforme. On note également

$$S_k = \sum_{i=1}^k U_i.$$

1. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi(\lambda) = \ln(\mathbb{E}[e^{\lambda U_1}])$. Établir que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(\lambda) \leq \frac{\lambda^2}{2}.$$

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a l'inégalité

$$\mathbb{P}(S_k \geq t) \leq \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t).$$

3. En déduire l'inégalité de Hoeffding pour S_k : pour tout $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}(S_k \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right).$$

On introduit maintenant une variable aléatoire uniforme $C : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$. Pour $\omega \in \Omega$, on note $C_{i,j}(\omega)$ les coefficients de la matrice $C(\omega)$.

4. Soient $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$ deux vecteurs quelconques dans $\{-1, 1\}^n$. Montrer que $(x_i y_j C_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une famille de n^2 variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 1\}$, indépendantes et de loi uniforme.
5. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}(M(C) \geq t n^{3/2}) \leq \exp\left(-\left(\frac{t^2}{2} - 2 \ln 2\right) n\right).$$

6. On rappelle la notation $\underline{M}(n) = \min \{M(A) \mid A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})\}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\underline{M}(n) \leq 2\sqrt{\ln 2} n^{3/2}.$$

Indication : on pourra commencer par montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice A dans $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ telle que

$$M(A) \leq (2\sqrt{\ln 2} + \varepsilon) n^{3/2}.$$

Partie III

Dans cette partie, on établit un minorant non trivial pour $\underline{M}(n)$.

1. Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n} \in \{-1, 1\}^n$, on note

$$g_A(Y) = \max \{ {}^t X A Y \mid X \in \{-1, 1\}^n \}.$$

Montrer que la fonction g_A peut se réécrire

$$g_A(Y) = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} y_j \right|.$$

2. On introduit maintenant une variable aléatoire uniforme $Z : \Omega \rightarrow \{-1, 1\}^n$. Pour $\omega \in \Omega$, on note $Z_i(\omega)$ les coordonnées de $Z(\omega)$. Montrer que pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, on a

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \mathbb{E} \left[\left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} Z_j \right| \right] = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n - 2k|,$$

où $\binom{n}{k}$ désigne le coefficient binomial. En déduire

$$\mathbb{E}[g_A(Z)] = \frac{n}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |n - 2k|.$$

3. (a) Montrer que pour $m \in \{0, \dots, n-1\}$, on a

$$\sum_{k=0}^m (n - 2k) \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{m}.$$

- (b) En déduire que pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$,

$$\mathbb{E}[g_A(Z)] = \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor},$$

où $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ désigne la partie entière de $\frac{n}{2}$.

4. (a) Montrer que

$$\underline{M}(n) \geq \frac{n^2}{2^{n-1}} \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

- (b) Montrer ensuite, à l'aide de la formule de Stirling rappelée en préambule, que ce minorant est équivalent à Cn^α quand n tend vers l'infini, pour des constantes C et $\alpha > 0$ que l'on explicitera. Comparer au majorant de $\underline{M}(n)$ obtenu à la question 6 de la partie II.