PC* 2025-2026

Programme de colle N°2 : semaine du 22 septembre au 27 septembre

*Intégration sur un segment
Révision du programme précédent

*Intégrales généralisées, th de convergence dominée
-Définition d'une intégrale impropre convergente pour une fonction continue par morceaux sur un intervalle du type $[a,b[$ ; $]a,b]$ ou $]a,b[$ avec $a$ et $b$ éventuellement infinis .
Pour une fonction à valeurs complexes , l'intégrale de $f$ converge ssi les intégrales des parties réelles et imaginaires de $f$ convergent .
-Théorème de comparaison pour les fonctions positives sur $[a,b[$ :Si $f \leq g$ ( resp $f = O(g)$ , resp $f = o(g)$ ) au vois de b et l'intégrale de g converge alors l'intégrale de $f$ converge .Si $f \sim g$ au vois de b alors l'intégrale de f et celle de g sont de même nature
Idem pour des fonctions positives sur $]a,b]$
-Intégrales de référence : intégrales de Riemann ( au vois de 0, de a et de $+\infty$ ) , $\int_0^1 \ln x \, dx$ et $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \, dt$ .
-Linéarité , croissance , Chasles. Intégration par parties , changement de variable .
-Intégrales absolument convergentes . Une intégrale absolument convergente est convergente
Fonctions intégrables sur un intervalle quelconque .Inégalité triangulaire. Espace vectoriel $L^1(I,K)$
- Théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions

*Questions de cours

1) Formule de Taylor avec reste intégral

2) Convergence de l'intégrale de Riemann au voisinage de 0 et de l'infini

3) Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(1+x)} dx$

4) Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, dt$ . Montrer qu'elle converge et la calculer

5) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx$ . Montrer que $I$ converge et la calculer par changement de variable $t = \dfrac{1}{x}$

6) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{x(1+x^2)} dx$

A suivre : Séries numériques