Préparation à l'oral : algèbre

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a = 2n+3$ et $b = 5n-2$. Déterminer le PGCD de a et b selon les valeurs de n .

2) Centrale 2021

Soient $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $S(n, p)$ le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$

Par convention $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $S(n,0) = 0$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $S(0,p) = 0$ et $S(0,0) = 1$

1) Déterminer $S(n, p)$ lorsque $p > n$, déterminer $S(n,1)$, $S(n,2)$, $S(n,n)$ et $S(p+1, p)$

2) Montrer que $S(n, p) = p\left[S(n-1, p) + S(n-1, p-1)\right]$ pour $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$

3) Montrer que $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2$ $S(n, p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^n$

3) Mines 2025

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples de degré $n \geq 2$.

1) Montrer que P' est scindé à racines simples.

2) Montrer que 2 coefficients successifs de P ne peuvent pas être tous les 2 nuls.

3) Montrer qu'aucun coefficient nul de P ne peut être encadré par 2 coefficients de même signe. Indication : Calculer $\dfrac{P'(x)}{P(x)}$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $P(x)P''(x) - (P'(x))^2 \leq 0$. En déduire une inégalité sur 3 coefficients successifs de P

4) Mines 2025

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que deux sous espaces vectoriels de E et $trA = 0$. Montrer que A est semblable à $E_{1,n}$

5) Mines 2025

Soit E un K-espace vectoriel et $u \in GL(E)$. On dit que u est un endomorphisme échangeur ssi il existe F et G deux sous espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$, $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$

Montrer que u est un endomorphisme échangeur ssi il existe $v \in L(E)$ et $w \in L(E)$ tels que $u = v + w$; $v^2 = 0$ et $w^2 = 0$

6) Mines 2025

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in L(E)$ tel que $u \neq 0$.

Montrer que u est une homothétie si et seulement si $\forall (v, w) \in L(E)^2$ $u = v \circ w \Rightarrow u = w \circ v$

Indication pour $\Leftarrow$: Montrer que u commute avec tous les automorphismes puis avec tous les endomorphismes de E

7) Mines 2024

Considérons l'application u définie sur $\mathbb{C}[X]$ par $\forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad u(P)(z) = e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n$

1) Montrer que $u \in L(\mathbb{C}[X])$

2) Déterminer les valeurs propres de u. Indication : Montrer que $\mathbb{C}_p[X]$ est stable par u

8) Mines 2025

Soit $(A,B) \in M_n(\mathbb{C})^2$

1) On suppose $\exists P \in GL_n(\mathbb{C}) \quad A = PB$, montrer que $KerA = KerB$

2) Montrer la réciproque. Indication : considérer les endomorphismes associés et un supplémentaire de $Kerg$ dans $\mathbb{C}^n$ (avec g l'endomorphisme associé à B dans la base canonique)

9) Centrale 2025

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $f \in L(E)$. On dit qu'un endomorphisme $g \in L(E)$ est un pseudo-inverse de f si : $f \circ g \circ f = f$, $g \circ f \circ g = g$ et $f \circ g = g \circ f$

1) Que peut-on dire de g si f est inversible ? Si $f = 0$?
2) Montrer que si f admet un pseudo-inverse alors $E = Kerf \oplus \operatorname{Im} f$
3) Supposons $E = Kerf \oplus \operatorname{Im} f$. Proposer un pseudo-inverse de l'endomorphisme induit par f sur $\operatorname{Im} f$. En déduire que f admet un pseudo-inverse
4) Dans le cas où E est de dimension finie, Montrer que f admet un pseudo-inverse si et seulement si $rg(f) = rg(f^2)$

10) Centrale 2025

Soit $A \in S_N^{++}(\mathbb{R})$, $E = M_{N,1}(\mathbb{R})$, $X_0 \in E$ tel que $X_0 \neq 0$

On définit les applications suivantes :

$$\varphi_0 : \{0\} \to E \qquad \varphi_n : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to E$$
$$P \mapsto 0 \qquad\qquad P \mapsto P(A)AX_0$$

1) Montrer que φ_n est linéaire et que la suite $(rg\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
2) On pose $m(X_0)$ le plus grand entier naturel tel que $rg\varphi_k = k$. Montrer que cet entier est bien défini et que $1 \le m(X_0) \le N$
3) Si X_0 est un vecteur propre de A, que peut on dire de $m(X_0)$?
4) Déterminer une famille génératrice de $\operatorname{Im}(\varphi_n)$ et montrer que $rg\varphi_n \le n$
5) Montrer que $\forall k \in [\![0, m(X_0)]\!] \quad rg\varphi_k = k$ et $\forall k > m(X_0) \quad rg\varphi_k < k$

6) On appelle p le nombre de valeurs propres distinctes de A. En utilisant le fait que A soit diagonalisable, montrer que $\operatorname{Im}\varphi_n$ est inclus dans un espace vectoriel de dimension p. En déduire que $m(X_0) \leq card(Sp(A))$

11) Mines 2022

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Déterminer toutes les matrices $X \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $X + X^T = tr(X)A$

Indication : discuter sur A (et notamment sur $tr(A)$) et montrer que l'ensemble des solutions est soit $A_n(\mathbb{R})$ soit $A_n(\mathbb{R}) + Vect(A)$

12) CCINP 2023

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre de A. Soit U un vecteur propre de A associé à λ. On pose $M = \begin{pmatrix} A & UU^T \\ UU^T & A \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ telles que $Y = \begin{pmatrix} U \\ \alpha U \end{pmatrix}$ soit un vecteur propre de M.

Montrer que M est diagonalisable et déterminer une base de vecteurs propres de M

13) CCINP 2019 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$ (*)

En calculant $\det A$, montrer que 0 ou -1 est valeur propre de M

Déterminer toutes les valeurs propres possibles de M (on pourra s'aider de la trace)

En déduire que M est diagonalisable et trouver 4 matrices M vérifiant (*)

14) Mines 2023 :

Soient $(A, B) \in (M_n(\mathbb{C}))^2$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ des complexes tous distincts tels que $\forall i \in [\![1, n+1]\!] \quad A + \lambda_i B$ est nilpotente . Montrer que A et B sont nilpotentes.

Indication : on pourra redémontrer qu'une matrice carrée de taille n nilpotente a un indice de nilpotence inférieur ou égal à n et considérer $\lambda \mapsto (A + \lambda B)^n$

15) Mines 2023

Soit $A \in M_3(\mathbb{C})$

Montrer que $-A$ est semblable à $A \Leftrightarrow trA = 0$ et $\det A = 0$

Indication : Pour le sens réciproque, raisonner sur les valeurs propres et le rang de A

16) Centrale 2019

1) Montrer que toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est la limite d'une suite de matrices diagonalisables.

Indication : étudier à part le cas d'une matrice ayant une seule valeur propre dans $\mathbb{C}$

2) Montrer que $\chi_A(A) = 0$ (th de Cayley-Hamilton)

Indication : montrer que c'est vérifié pour une matrice diagonale, puis diagonalisable, puis quelconque

17) Mines 2023

Soit $f \in L(M_2(\mathbb{R}))$ telle que $tr(f(I_2)) = 0$ et pour toute matrice nilpotente N on a $f(N) = 0$.

Montrer que $f \circ f = 0$

18) ENS 2023 (facile)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision (ordonnée) de $[0,1]$

Montrer $\exists(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \int_0^1 P(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i P(x_i)$

Les coefficients α_i sont ils uniques ?

Le résultat reste t'il vrai si $\deg P > n$?

19) Mines 2025

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$

1) Montrer qu'il existe $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $(X_0, AX_0, \ldots, A^{n-1}X_0)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$
2) Soit $C(A) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \setminus AM = MA\}$ (commutant de A). Montrer que $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est une base de $C(A)$. Indication : que peut on dire de l'application $M \in C(A) \mapsto M X_0$?

20) Mines 2024

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$ (*)

1) Montrer que $A^4 - 2A^2 + A = 0$
2) Montrer que 1 n'est pas valeur propre de A
3) Montrer que A est diagonalisable et déterminer toutes les matrices A vérifiant la condition (*)

21) Centrale 2023 :

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A^2 + A = 0$

Montrer que $trA \in \mathbb{Z}^-$.

On suppose A inversible. Calculer $\det A$ et montrer que n est pair.

Trouver un plan vectoriel de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ stable par A

22) CCINP 2025

On pose $\forall(P,Q) \in (\mathbb{R}[X])^2 \quad (P \setminus Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt$. on donne $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!$ pour $k \in \mathbb{N}$

1) Montrer que cela définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $Q = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$ le projeté orthogonal de 1 sur $Vect(X, X^2, \ldots, X^n)$

On pose $P = 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k (X+1)(X+2)\cdots(X+k)$

2) En déterminant $\left(1 - Q \setminus X^i\right)$ pour $i \in [\![1,n]\!]$, montrer que $\forall i \in [\![1,n]\!] \quad P(i) = 0$. En déduire P (astuce ; calculer $P(-1)$)

3) Montrer que $\underset{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n}{Inf} \int_0^{+\infty} \left(1 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n\right)^2 e^{-t}\, dt = \dfrac{1}{n+1}$

23) Mines 2025

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que $A^q = I_n$. Montrer que $\dim Ker(A - I_n) = \dfrac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} tr(A^k)$

24) Mines 2023

Pour $M \in M_n(\mathbb{R})$ on pose $f(M) = \dfrac{1}{3}\left(2M - M^T\right)$

Déterminer les valeurs propres de f ainsi que $tr(f)$ et $\det(f)$. f est elle diagonalisable ?

25) Centrale 2022

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$; On pose $J \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf $J_{i,i+1} = 1$

1) Montrer que A et J sont semblables.

2) Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA$, montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $B = P(A)$

Indication : chercher la forme des matrices qui commutent avec J

26) Mines 2022

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A,B) \in \left(M_n(\mathbb{R})\right)^2$ qui commutent et $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ tels que $p^2 - 4q \leq 0$

Montrer que $\det\left(A^2 + pAB + qB^2\right) \geq 0$

Indication : déterminer une factorisation de $A^2 + pAB + qB^2$ à partir de la factorisation de $X^2 + pX + q$

27) Centrale 2022

Soit $p \in \mathbb{N}$ $p \geq 2$ et une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = u_{n+p-1} + \cdots + u_n$

Soit $P = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} X^k$. On pose aussi $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$

1) Déterminer une matrice $A \in M_p(\mathbb{R})$ telle que $U_{n+1} = AU_n$

2) Déterminer une relation entre A, n, U_0 et U_n

3) Montrer que $\chi_A = P$

4) Soit $T=(X-1)P$. Montrer que T admet une unique racine réelle dans $]1,2[$. Montrer que T est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$. Que peut en déduire pour A ?

5) En déduire un moyen de calculer u_n

28) Mines 2021 :Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ antisymétrique non nulle

1) Montrer que A n'admet pas de valeur propre réelle différente de 0
2) En déduire que les matrices I_n+A et I_n-A sont inversibles
3) Montrer que la matrice $(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$ est orthogonale

29) Centrale 2022

Soit $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ telle que si $|i-j|=1$ alors $a_{i,j}=1$ sinon $a_{i,j}=0$

1) Justifier l'existence d'une base orthonormée $(U_1,\dots,U_n)$ telle que $\forall i\in[\![1,n]\!]\quad AU_i=\lambda_i U_i$
2) On pose $V_{i,j}=U_iU_j^T$. Montrer que $(V_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ est une base orthonormée de $M_n(\mathbb{R})$ pour le produit scalaire $(A,B)\mapsto tr(A^TB)$
3) Pour $M\in M_n(\mathbb{R})$, on pose $T(M)=AM+MA+M$. Montrer que T est diagonalisable, expliciter les vecteurs propres et valeurs propres de T

30) Mines 2024

Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ et $B=\begin{pmatrix} A & 2A\\ 0 & 3A\end{pmatrix}$,

1) Montrer que si B est diagonalisable alors A est diagonalisable
2) Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$
3) Montrer que B est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0\\ 0 & 3A\end{pmatrix}$
4) Supposons que A est diagonalisable . Montrer que B est diagonalisable.

31) Mines 2025

Soient P et Q deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ de projections orthogonales .On pose $M=P+Q$

1) Montrer que M est diagonalisable
2) Montrer que $Sp(M)\subset[0,2]$. Indication : Pour $X\in M_{n,1}(\mathbb{R})$ unitaire, montrer que $X^TPX\in[0,1]$
3) On suppose de plus que PQ est la matrice d'une projection orthogonale. Montrer que P et Q commutent. Montrer que $Sp(M)\subset\{0,1,2\}$

32) Centrale 2021

Soit $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et la matrice $H_n=\left(\dfrac{1}{i+j-1}\right)_{1\le i,j\le n}$, h_n l'endomorphisme canoniquement

associé à H_n, on pose aussi $q_n(x)=\left(h_n(x)\backslash x\right)$ (avec le produit scalaire canonique)

1) Montrer que H_n est diagonalisable
2) Exprimer $q_n(x)$ en fonction des x_i (coordonnées de x dans la base canonique). Montrer que q_n est continue sur $\mathbb{R}^n$
3) Soit $S_n=\left\{x\in\mathbb{R}^n \backslash \|x\|=1\right\}$ (pour la norme euclidienne). Montrer que q_n est bornée et atteint ses bornes sur S_n
4) Montrer que $q_n(x)=\int_0^1\left(\sum_{k=1}^n x_k\, t^{k-1}\right)^2 dt$
5) Montrer que les valeurs propres de H_n sont toutes strictement positives.
6) Déterminer le minimum et le maximum de q_n sur S_n

33) Centrale 2022 On muni $M_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel et on pose

$B_n=\left\{A\in M_n(\mathbb{R})\backslash A^T=A^2\right\}$

Soit $A\in B_n$

1) Simplifier A^4-A. Montrer que A^3 est une matrice de projection
2) Vérifier que A^3 est symétrique
3) Montrer que $KerA^3=KerA$ et $\operatorname{Im}A^3=\operatorname{Im}A$
4) Soit F un sous espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ stable par A. Montrer que $F^{\perp}$ est stable par A

Soit $A\in B_2$ telle que $A\neq I_2$ et A inversible.

5) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et déterminer $Sp_{\mathbb{C}}(A)$. Calculer $tr(A)$ et $\det A$.
6) Montrer que A est orthogonale. Déterminer toutes les matrices A qui vérifient ces conditions

34) Centrale 2025

Soit E un espace préhilbertien. Soit $A=\left(a_{i,j}\right)\in M_n(\mathbb{R})$ et $B=\left(e_1,\dots,e_n\right)$ une famille de E.

On pose $a_{i,j}=\left(e_i\backslash e_j\right)$

1) Montrer que $A\in S_n^+(\mathbb{R})$
2) Montrer que $rgA=rgB$. Indications : On considère B' une base orthonormée de $Vect(B)$ et C la matrice des coordonnées des vecteurs de B dans la base B'. Montrer que $A=C^T\,C$

35) Centrale 2025

1) Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie qui commutent ($u \circ v = v \circ u$) et qui sont diagonalisables. Montrer qu'ils se diagonalisent dans la même base (c'est-à-dire qu'il existe une base de E dont les vecteurs sont à la fois vecteurs propres de u et vecteurs propres de v)

2) Soient deux matrices A et B de $M_n(K)$ qui commutent et telles que B soit inversible. Montrer que A et B^{-1} commutent.

Dans la suite de l'exercice, on considère $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. On construit une suite de matrices $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $M_0 = I_n$ et $\forall k \in \mathbb{N} \quad M_{k+1} = \frac{1}{2}\left(M_k + AM_k^{-1}\right)$.

3) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} \quad M_k$ est inversible, et que $M_k \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

4) Montrer que la suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $M \in S_n^+(\mathbb{R})$. Quel est le lien entre M et A ?

36) Mines

Soit E un espace euclidien

1) Soit $u \in S(E)$. Montrer que $E = \operatorname{Im} u \overset{\perp}{\oplus} Keru$

2) Soit $u \in S^+(E)$ et $x \in E$. Montrer que $\left(u(x) \backslash x\right) = 0 \Rightarrow x \in Keru$

3) Soient $u \in S^+(E)$ et $v \in S^+(E)$, montrer que $Ker(u+v) = \ker(u) \cap Ker(v)$ et $\operatorname{Im}(u+v) = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$

Exercices rapides

37) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A - 4I = 0$. Montrer que $\det A > 0$

38) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I = 0$. Montrer que n est pair, calculer $\det A$ et $tr(A)$

A est elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

39) Déterminer toutes les matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui sont à la fois symétriques et orthogonales. Quelle est la nature des endomorphismes canoniquement associés ?

40) Diagonaliser la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (sans calculer son polynôme caractéristique)