

Préparation à l'oral : analyse

1) Centrale 2022

Pour tout polynôme réel P , on pose $a_n(P) = \int_0^1 P(t) t^n dt$

On pose $\|P\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)|$. $N_\infty(P) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n(P)|$. $N_2(P) = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n(P))^2}$.

- 1) Supposons que $\forall n \in \mathbb{N} \ a_n(P) = 0$. Montrer que $\int_0^1 P^2(t) dt = 0$. En déduire que $P = 0$.
- 2) Montrer que N_∞ et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$
- 3) Déterminer des constantes α et β strictement positives telles que $\forall P \in \mathbb{R}[X] \ N_\infty(P) \leq \alpha N_2(P)$
Et $N_2(P) \leq \beta \|P\|_\infty$
- 4) Montrer que ces normes ne sont pas équivalentes.
- 5) Montrer que la dérivation n'est pas continue pour la norme N_∞ ,

2) Mines 2025

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}}$

3) Centrale 2025

Calculer $\int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n+1} (2n+1)} \sin^{2n+1}(x) dx$

4) Mines 2025

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$.

1) Montrer que si $S_n \sim \frac{1}{a_n} \ (n \rightarrow +\infty)$ alors $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$

2) Montrer la réciproque.

Indications : pour la question 1), considérer $S_{n+1}^2 - S_n^2$ et appliquer Cesaro. Pour la question 2), montrer

que $\sum_{k=1}^n a_k \sim \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k}}$

5) Mines 2025

Soit $h \in C^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+^*)$ telle que $h'' > 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h'(x) = +\infty$.

- 1) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists ! u_n \in \mathbb{R}_+^*, h(u_n) = n\pi$
- 2) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n$

3) Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \sin(h(t)) dt$. Indication : Montrer que la série $\sum \int_{u_n}^{u_{n+1}} \sin(h(t)) dt$ converge.

6) Mines 2025

Soit $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$. Déterminer un développement limité de f à l'ordre n lorsque $x \rightarrow +\infty$

7) Mines 2025

Soit $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On suppose que

$$\forall x \in [0,1] \quad (f(x))^2 \leq a + b \int_0^x f(t) dt. \text{ Montrer que } \forall x \in [0,1] \quad \int_0^x f(t) dt \leq \sqrt{a} x + \frac{b}{4} x^2$$

Indication : Poser $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ et exprimer l'hypothèse en fonction de F

8) Mines 2025

Soit $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ vérifiant :

$$\forall x \in [a,b] \quad f(a+b-x) = f(x)$$

Montrer que $\int_a^b x f(x) dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x) dx$. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x e^{ix}}{1 + \cos^2 x} dx$

9) Mines 2023

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , continue en 0 et vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$$

Montrer que f est continue sur \mathbb{R} et déterminer toutes les applications vérifiant cela

10) Soit $f \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ et $S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - n f(0)$. Déterminer la limite de la suite (S_n)

11) Mines 2021 : On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

1) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 n \ln(1+t^n) dt = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du$

2) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 n \ln(1+t^n) dt = \frac{\pi^2}{12}$ (on pourra effectuer un DES de $\ln(1+u)$)

3) Soit $f \in C^0([0,1], \mathbb{R})$, déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 n f(t) \ln(1+t^n) dt$

12) Mines 2023 On pose $a_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)} dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrer que a_n existe bien

2) Déterminer un équivalent de a_n quand $n \rightarrow +\infty$

3) Etudier la convergence de $\sum a_n^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$

13) Centrale 2025

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(x^n + \left(\frac{x}{x-1} \right)^n \right)$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \left(x^n + (1-x)^n \right)$

Déterminer le domaine de définition de ces deux fonctions et les calculer .

Indication : Considérer $L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$

14) Mines 2023

Soit $f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \ln n}{1+n^2 x}$

1) Déterminer le domaine de définition de f . Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur son domaine de définition.

2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$

15) Centrale 2025 : Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n} e^{i n x}$ et pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $u_k = \sum_{n=0}^{+\infty} n^k e^{-n}$.

1) Montrer que f est bien définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

2) Montrer que u_k existe bien et que $u_k = O(k!)$ lorsque $k \rightarrow +\infty$

3) Montrer que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et préciser les coefficients de son développement

16) Centrale 2025

Soit $f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=0}^N \left(1 + e^{-n(1+x^2)} \right)$ (avec $x \in \mathbb{R}$)

Déterminer le domaine de définition de f , montrer qu'elle est de classe C^1 sur son domaine de définition, déterminer ses variations et sa limite en $+\infty$ et $-\infty$

17) Centrale 2025

Soit $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(f)(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$

1) Montrer que $\varphi \in L(E)$

2) Déterminer $\text{Ker} \varphi$

3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer $f_n \in E$ telle que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(f_n)(x) = x^n$.

4) Soit F l'ensemble des fonctions polynômiales réelles et G l'ensemble des fonctions polynômiales réelle qui s'annulent en 0. Montrer que φ induit une bijection de F dans G

5) Montrer que $\text{Im} \varphi = \left\{ g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}), g(0) = 0 \right\}$. Indication : pour $g \in \text{Im} \varphi$, calculer

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} g' \left(\frac{x}{2^k} \right)$$

18) Mines 2025 et 2022

On pose $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \quad f(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2} + \frac{1}{(x+n)^2}$

On considère la relation (*) : $f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4f(x)$

- 1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, 1-périodique et continue
- 2) Soit g une fonction continue sur \mathbb{R} , 1-périodique et vérifiant (*) est nulle
- 3) Montrer que $x \mapsto f(x) - \frac{\pi^2}{(\sin(\pi x))^2}$ est prolongeable par continuité sur \mathbb{R}
- 4) Montrer que $f(x) = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi x))^2}$

19) CCINP 2025

Soit $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $f_0 \in E$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n$ est de classe C^n sur \mathbb{R}
- 2) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists K \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in [-a, a] \quad |f_n(x)| \leq K \frac{|x|^n}{n!}$
- 3) On pose $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$. Montrer que F est de classe C^1 sur \mathbb{R} et vérifie $F - F' = f_0$

Exprimer F en fonction de f_0

20) Centrale 2025

On pose $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t} dt$ et $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

- 1) Montrer que S est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* . Déterminer $S(1)$
- 2) Déterminer le domaine de définition de I et étudier sa continuité
- 3) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_0^{+\infty} t^n e^{-kt} dt$
- 4) Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer un lien entre $I(n)$ et $S(n+1)$
- 5) En déduire un équivalent de $I(n)$ lorsque $n \rightarrow +\infty$
- 6) Déterminer un équivalent de $I(x)$ lorsque $x \rightarrow -1$

Indication : couper l'intégrale en 1. Pour l'intégrale sur $]0, 1[$ retrancher $\frac{1}{2} \int_0^1 t^x dt$

21) Mines 2025

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n e^{-nx}}{1+n^2}$

- 1) Déterminer le domaine de définition de f et montrer qu'elle est de classe C^1 sur ce domaine.
- 2) Déterminer les limites aux bornes du domaine

3) Déterminer un équivalent de f en 0

22) Centrale 2023

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f : t \in]-1, 1[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n} t^n$.

Montrer que f est bien définie sur $]-1, 1[$

En écrivant $\frac{t^n}{n} = \int_0^t u^{n-1} du$, calculer $f(t)$

Donner une autre méthode pour calculer $f(t)$ (sans effectuer les calculs)

23) Mines 2025 Déterminer le rayon de convergence et calculer la somme de la série entière

$$x \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n$$

Indication : Poser $f(x) = xS(x)$ et déterminer une équation différentielle vérifiée par f'

24) Mines 2021 : Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}$.

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, Soit R le rayon de convergence de f

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 0$
- 2) Montrer que $\forall x \in]-R, R[\quad x f^2(x) - f(x) + 1 = 0$
- 3) Déterminer une expression explicite de $f(x)$.
- 4) Développer f en série entière et en déduire u_n

25) Centrale 2016 : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls . Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$

et R' le rayon de convergence de $\sum \frac{1}{a_n} x^n$. Montrer que $RR' \leq 1$. Cas particulier : posons $a_n = 2^n$ si

n est pair et $a_n = 1$ si n est impair . Déterminer R et R'

26) Mines 2017 : Considérons l'équation différentielle $2x y'' + y' - y = 0$

Chercher une solution f de cette équation développable en série entière et qui vérifie $f(0) = 1$

Déterminer le rayon de convergence et l'expression de f

27) Mines 2023 :

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

Montrer que $\int_0^1 |f'(t) - f(t)| dt \geq \frac{1}{e}$

Indication : soit $g = f' - f$, exprimer f en fonction de g

28) Centrale 2024

$$\text{Soit } f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt$$

- 1) Déterminer le domaine de définition de f , montrer que f est de classe C^1 sur son domaine de définition

2) Déterminer une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$. En déduire un équivalent de f en $+\infty$

29) Centrale 2023

On pose $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{\ln t} t^{-x-3} dt$

- 1) Montrer que f est définie sur $] -1, +\infty[$
- 2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 3) Montrer que f est C^1 sur $] -1, +\infty[$ et déterminer f'

30) Centrale 2022 On définit $\forall t \in \mathbb{R} \quad F(t) = \int_0^\pi \cos(t \cos x) dx$

- 1) Justifier l'existence de $F(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- 2) Montrer que F est C^2 et donner les expressions de F' et F'' sous forme intégrale.
- 3) Montrer que F est développable en série entière et donner l'expression des coefficients en fonction de $w_{2n} = \int_0^\pi (\cos x)^{2n} dx$
- 4) Montrer que F vérifie l'équation différentielle (E) $t y'' + y' + t y = 0$
- 5) En déduire une expression des coefficients du développement en série entière de F et en déduire une expression de w_{2n}

31) Mines 2025 et 2023

On pose $I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1} \ln t}{1-t^2} dt$ pour $n \in \mathbb{N}$

- 1) Montrer l'existence de I_n
- 2) Exprimer I_n sous forme d'une série
- 3) Déterminer un équivalent de I_n quand $n \rightarrow +\infty$

32) Centrale 2015 et 2016: Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de nombres réels telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

Montrer que $\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-a_n x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a_n}$

33) Mines 2025

Soit $n \geq 2$ et $f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{k=1}^n x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \geq \|x\|$. Montrer que

$f(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$

Indication : Soit $x \in \mathbb{R}^n$, on considère $t \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|y\| = 1$. On pose $\varphi(t) = f(ty)$. Que peut on dire de $\varphi'(t)$?

34) CCINP 2024 (amélioré)

Soit $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ une fonction convexe de dérivée strictement négative.

On pose $f:(x,y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + g(x)$ définie sur \mathbb{R}^2

- 1) Montrer que l'équation $x + g'(x) = 0$ admet une unique solution sur \mathbb{R} . On pose α cette solution.
- 2) Montrer que $\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$ est l'unique point critique de f sur \mathbb{R}^2
- 3) Montrer que f admet un extremum local en ce point.
- 4) Montrer que l'extremum de f est global sur \mathbb{R}^2 . Indication : simplifier $f\left(\alpha + h_1, \frac{\alpha}{2} + h_2\right) - f\left(\alpha, \frac{\alpha}{2}\right)$ et appliquer Taylor reste intégral à g entre α et $\alpha + h_1$

35) Centrale 2021

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$

- 1) $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ on pose $g(t) = f(tx_0, ty_0)$. Montrer que g est de classe C^1 sur \mathbb{R} et déterminer g'
- 2) Montrer alors que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = f(0,0) + \int_0^1 \frac{\sin(t^2(x^2 + y^2))}{t} dt$
- 3) Montrer que f est bornée (on pourra faire le changement de variable $u = t^2(x^2 + y^2)$ dans l'intégrale)

36) Centrale 2025

Soit f une application lipschitzienne de f dans f .

$$K : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,t) \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

$$(x,t) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-y,t) f(y) dy$$

Montrer que $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$. Montrer que $\lim_{t \rightarrow 0} u(x,t) = f(x)$

Exercices rapides :

37) Déterminer les extremums sur \mathbb{R}^2 de $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 2x - 2y$

38) Mines 2018 Soit $f : x \mapsto \int_0^\pi \sqrt{x + \cos t} dt$: déterminer un équivalent de f en $+\infty$

39) Mines 2019 Déterminer la nature de la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$

40) A l'aide de 2 méthodes différentes, déterminer un équivalent simple de $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$