

Préparation à l'oral : probabilités

1) Centrale 2017

Une urne contient n boules blanches et n boules noires . On effectue des tirages successifs sans remise . Déterminer la moyenne des tirages nécessaires pour tirer les n boules blanches.

Aide : montrer que
$$\sum_{n=p}^{p+q} \binom{n}{p} = \binom{p+q+1}{p+1}$$

2) CCINP 2023

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N}^* . On pose $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = P(X = n)$ et $\varphi :]0,1[\rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto -x \ln x$

On dit que X admet une entropie ssi la série $\sum \varphi(p_n)$ converge et on appelle entropie de X le réel

$$H(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(p_n)$$

- 1) Tracer le tableau de variations de φ
- 2) Supposons que X suit une loi géométrique de paramètre p , montrer que X admet une entropie et la calculer
- 3) Supposons que X admette une espérance

a) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = 0$. Montrer que $\exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq \varphi(p_n) \leq \sqrt{p_n}$

b) Pour $n \geq n_0$ fixé, majorer $\varphi(p_n)$ par des termes généraux de séries convergentes en

distinguant 2 cas suivant que $p_n \leq \frac{1}{n^3}$ ou $p_n \geq \frac{1}{n^3}$. En déduire que X admet une entropie

3) CCINP 2024

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges.

On tire une boule . Si elle est rouge, on la remet, si elle est blanche, on la remplace par une rouge et on réitère l'opération.

Soit X_p le nombre de boules blanches dans l'urne au moment du p ième tirage. G_p sa fonction génératrice.

- 1) Déterminer la loi de X_1 et X_2
- 2) Déterminer une relation entre $P(X_{p+1} = k)$, $P(X_p = k+1)$ et $P(X_p = k)$
- 3) Justifier que G_p est polynomiale. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R} \quad G_{p+1}(t) = G_p(t) + \frac{1-t}{2n} G_p'(t)$
- 4) Calculer $E(X_p)$ et déterminer sa limite lorsque $p \rightarrow +\infty$

4) CCINP 2024 et 2025

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ et Y une variable aléatoire telle que la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ est une Binômiale de paramètre n et p .

- 1) Déterminer la loi de Y

- 2) Calculer $\text{cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?
- 3) Déterminer la loi de $X - Y$. Montrer que Y et $X - Y$ sont indépendantes.

5) CCINP 2025

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ ;

Montrer que $\forall t \in [1, +\infty[\quad \forall a \in \mathbb{R} \quad P(X \geq a) \leq \frac{G_X(t)}{t^a}$

En déduire que $P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$

Obtenir une autre majoration en utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev. Comparer les deux résultats.

6) Mines 2025

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi géométrique de paramètre p .

Déterminer $P(X^Y = Y^X)$ et $P(X^Y \leq Y^X)$

7) Mines 2024

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre

$2/3$. On pose $A_k : "X_{2k-1} X_{2k} = 0"$ et $B_p = \bigcap_{k=1}^p A_k$. Soit $T = \text{Min}\{k \geq 2 \mid X_{k-1} = X_k = 1\}$,

$T \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

- 1) Montrer que $P\left(\overline{\bigcap_{k=1}^{+\infty} A_k}\right) = 1$ et en déduire que $P(T \in \mathbb{N}) = 1$
- 2) Déterminer une relation entre $P(T = n)$; $P(T = n-1)$ et $P(T = n-2)$ (on pourra utiliser un SCE faisant intervenir les valeurs de X_1 et X_2)
- 3) Calculer $E(T)$

8) Centrale 2023 (extrait)

Soit $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans

$\{-1, 1\}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(\varepsilon_k = 1) = P(\varepsilon_k = -1) = \frac{1}{2}$

On pose $X_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} \varepsilon_k$ et $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\ln k}{k}\right)^2$

- 1) Montrer que X_n a une espérance et une variance et les calculer.
- 2) Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On appelle S sa limite

3) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(X_n \geq a) \leq \frac{S_n}{a^2} \leq \frac{S}{a^2}$

9) Centrale 2024: Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires indépendantes suivant la même loi à valeurs dans \mathbb{N} . On pose $M_n = \text{Max}(X_1, \dots, X_n)$

1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} \quad P(M_n \leq k) = P(X_1 \leq k)^n$.

2) On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $E(X_1^\alpha)$ est finie et on note $m_\alpha = E(X_1^\alpha)$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P(X_1 \leq k-1) \geq 1 - \frac{m_\alpha}{k^\alpha}$. Montrer que M_n est d'espérance finie.

3) On suppose que X_1 suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$. Montrer que

$$E(M_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(1 - (1 - 2^{-k})^n\right) \text{ et que } E(M_n) \sim \frac{\ln n}{\ln 2} \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

10) Mines-Télécom 2025

Soient deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant chacune une loi géométrique de paramètre p

Soit $M = \begin{pmatrix} X & X \\ -Y & -Y \end{pmatrix}$

Déterminer la probabilité que M soit nilpotente et la probabilité que M soit diagonalisable sur \mathbb{R}

11) Mines 2019 On considère des variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indépendantes, suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ définies sur un espace probabilisé (Ω, P) . On pose $q = 1 - p$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On pose l'évènement $A = \left\{ \omega \in \Omega \mid \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)} \text{ converge} \right\}$

1) Calculer $P(A)$ pour $\alpha > 1$

On se place maintenant dans le cas $\alpha \in]0, 1[$ et on pose $\beta = 1 - \alpha$

2) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^* \quad P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^\beta)\right) \leq \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n^\beta - 1}$

3) Etudier la convergence de la série $\sum q^{n^\beta - 1}$. En déduire $\lim_{k \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^\beta)\right)$

4) En déduire $P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} (X_n > n^\beta)\right)$

On pose $A_\beta = \left\{ \omega \in \Omega \mid X_n(\omega) > n^\beta \text{ est vraie pour un nombre fini d'entiers naturels } n \right\}$

5) Montrer que $A_\beta = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{n=k}^{+\infty} (X_n \leq n^\beta)$. Montrer que $P(A_\beta) = 1$

6) Montrer que si $\omega \in A_\beta$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha X_n(\omega)}$ diverge

7) Déterminer $P(A)$

12) Mines 2025

Soit $x > 0$ et une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre x

1) Soit $\alpha \in]0, 1[$, montrer que $P(|X - x| \geq \alpha x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$

On fixe $s > 0$ et on pose $u : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^s n!}$

2) Déterminer l'ensemble de définition de u

On veut montrer que $u(x) \sim \frac{e^x}{x^s}$ quand $x \rightarrow +\infty$. Pour A un évènement, on note I_A la fonction indicatrice

de A . On considère les évènements $A_x : "|X - x| < \alpha x"$; $B_x : "X - x \geq \alpha x"$;

$C_x : "X - x \leq -\alpha x"$; $D_x : "X \geq 1"$

3) Ecrire $e^{-x} u(x)$ sous forme d'une espérance d'une variable aléatoire.

4) Montrer que $E\left(\frac{x^s}{X^s} I_{A_x} I_{D_x}\right) \rightarrow 1$ quand $x \rightarrow +\infty$ (encadrer $\frac{1}{X^s}$ si A_x et D_x sont réalisés)

5) Montrer que $E\left(\frac{x^s}{X^s} I_{B_x} I_{D_x}\right) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$

6) Montrer que $P(X \leq x(1 - \alpha)) \leq e^{-x(1+\alpha)}$

7) Montrer que $E\left(\frac{x^s}{X^s} I_{C_x} I_{D_x}\right) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$

8) Conclure

Exercices rapides

13) Mines 2022

On note $E = P(\llbracket 1, n \rrbracket) \times P(\llbracket 1, n \rrbracket)$ muni d'une distribution uniforme. Quelle est la probabilité d'avoir un couple (A, B) de E tel que A et B soient disjoints ?