Préparation à l'oral : X-ENS

1) X-ESPCI 2015 . Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 et $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = M$

1) A existe-t-elle ? Donner un exemple de matrice A qui convient .

2) Soit A quelconque vérifiant cette relation , montrer que $(trA)^3 = n$

2) X-ESPCI 2016

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X] \setminus P(0) = P'(0) = 0\}$

$u : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \quad P \mapsto P(X+1) - P(X)$

$v : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] \quad P \mapsto P(X+1) - 2P(X) + P(X-1)$

$\varphi : E \to \mathbb{R}[X] \quad P \mapsto P(X+1) - 2P(X) + P(X-1)$ (restriction de v à E)

1) Déterminer le noyau de u et de v

2) Montrer que φ est injective

3) Montrer que φ est bijective

3) X 2018

Soit E l'ensemble des matrices nilpotentes de $M_n(\mathbb{R})$

1) Montrer que E est fermé

2) Montrer que $\overset{\circ}{E} = \varnothing$ (indication : montrer que si $A \in E$ alors $\det(\alpha I_n - A) \neq 0$ pour $\alpha \neq 0$, en déduire que toute boule de centre A contient une matrice inversible)

3) Existe-t-il $M \in E$ telle qu'il existe $r > 0$ tel que $B(M, r) \cap E = \{M\}$?

4) X-ESPCI 2018

Soit E un espace euclidien , p et q deux projecteurs orthogonaux de E .

1) Montrer que $\operatorname{Im} p$ est stable par $p \circ q$ et que l'endomorphisme induit par $p \circ q$ sur $\operatorname{Im} p$ est symétrique.

2) Montrer que $(\operatorname{Im} p + Kerq)^{\perp} = \operatorname{Im} q \cap Kerp$

3) En déduire que $E = \operatorname{Im} p + Kerq + (Kerp \cap \operatorname{Im} q)$

4) En déduire que $p \circ q$ est diagonalisable

5) X 2019

Soit E un espace vectoriel complexe de dimension n , f un endomorphisme diagonalisable de E . Montrer que : il existe un élément v de E tel que $(v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ soit une base si et seulement si f possède n valeurs propres distinctes.

6) X 2019

Peut on truquer un dé numéroté de 1 à n ($n \geq 3$) de sorte que, en le lançant deux fois de suite, la somme des numéros obtenus suive la loi uniforme sur $[\![2, 2n]\!]$?

7) X 2019

Soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$. Déterminer l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ commutant avec u

8) X 2019 On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $e^x + x = n$.

Montrer qu'il existe une unique solution réelle positive u_n. Etudier la suite ainsi définie. Trouver un équivalent de u_n en $+\infty$ puis un développement asymptotique de u_n (à la précision $\dfrac{\ln n}{n}$)

9) X 2019

Etudier la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$. Indication : Etudier la nature de la série de terme général $u_n + u_{n+1}$

10) X 2019

Soit E l'espace des fonctions réelles deux fois dérivables sur $[0,1]$. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$.

Montrer que si $\int_0^1 f(t)g(t)\,dt = 0$ pour toute fonction $g \in E$ alors f est la fonction nulle.

11) ENS 2021 Fonctions à variations bornées

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue, $\sigma = (x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$

Sub l'ensemble de toutes les subdivisions de $[a,b]$

On pose $v_\sigma(f) = \sum_{k=1}^{n-1} \left| f(x_{k+1}) - f(x_k) \right|$ et $V(f) = \sup_{\sigma \in Sub} v_\sigma(f)$

On dit que f est à variations bornées sur $[a,b]$ ssi $V(f)$ est fini .

f est-elle à variations bornées dans les cas suivants ?

1) f est monotone
2) f est lipschitzienne
3) f est de classe C^1
4) Sans hypothèses supplémentaires

12) X-ESPCI 2022

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. f et g des endomorphismes de E

Montrer que $rg(f)+rg(g)=rg(f+g) \Leftrightarrow \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g=\{0\}$ et $E=Kerf+Kerg$

13) ENS 2023

Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que f et f' soient bornées.

Pour $\varepsilon>0$, on pose $F_\varepsilon(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t} f(x+t\,\varepsilon)\,dt$

Montrer que F_ε est bien définie sur $\mathbb{R}$

Pour $\varepsilon>0$ fixé, on suppose que $\forall x\in\mathbb{R} \quad F_\varepsilon(x)=1$, montrer que $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=1$

Montrer $\exists C>0 \quad \forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^* \ \ \forall x\in\mathbb{R} \quad |F_\varepsilon(x)-f(x)|\le \varepsilon C$

Donner des conditions sur f pour qu'il existe une fonction g et un réel $C'>0$ tels que
$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}_+^* \ \ \forall x\in\mathbb{R} \quad |F_\varepsilon(x)-f(x)-\varepsilon\, g(x)|\le \varepsilon^2 C'$

Préciser alors la fonction g

14) ENS 2023

On considère une pièce de monnaie qui donne pile avec une probabilité p
On lance la pièce jusqu'à l'obtention du premier pile. Si le premier pile est obtenu au n ième lancer, on lance un dé à 6 faces n fois. On a gagné si on obtient un seul 6 lors de ces n lancers de dé.
Déterminer la valeur de p pour avoir le plus de chances de gagner

15) ENS 2023

Soit $f\in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)\ge 0$. On pose
$\forall x\in\mathbb{R} \quad M_f(x)=\underset{R\in\mathbb{R}_+^*}{Sup}\left(\frac{1}{2R}\int_{x-R}^{x+R} f(t)\,dt\right)$

1) Ce Sup est il forcément atteint ?
2) On suppose que f est bornée. M_f est-elle forcément bornée ?
3) On suppose que f est bornée, paire et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer M_f

Indications :On pose $l=\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (justifier qu'elle existe). Majorer $M_f(x)$ en fonction de l Montrer que $\lim_{R\to+\infty}\frac{1}{R}\int_0^R f(t)\,dt=l$. Conclure

16) ENS 2024

Soit $A\in M_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients valent 0 ou 1 . Combien de coefficients 1 possède A au maximum pour être inversible ?

Indication ; regarder pour les petites valeurs de n

17) X 2024

<u>On admettra le résultat suivant :</u> Pour toute fonction f continue sur un segment $[a,b]$, il existe une suite de fonctions polynômes qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$ (th de Weiertrass)

Soit $f \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, soient $(A,B) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tels que $\forall x \notin]-A,A[\quad f(x)=0$.

On pose $\hat{f} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt$

On suppose que $\forall x \in]-B,B[\quad \hat{f}(x)=0$, montrer que $f=0$. Indication : écrire le DES de e^{-ixt}

18) ENS 2024

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$, $f'(0)=0$ et $f''(0)>0$

Montrer $\exists \lambda_0 > 0 \quad \forall \lambda \in]0,\lambda_0[\quad \exists x>0 \quad f(x)=\lambda x$

Indication : faire intervenir $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$

19) X 2024

Soient A et B appartenant à $S_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement supérieures à 1. Montrer que les valeurs propres de AB sont aussi strictement supérieures à 1. Indication : Etablir l'existence de R une racine carrée symétrique de A et montrer que AB est semblable à RBR

20) ENS 2023 et X 2024

1) Soient $(P,Q) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$ tels que $P+iQ \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer $\exists t \in \mathbb{R} \quad P+tQ \in GL_n(\mathbb{R})$
2) Application : Soient A et B appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = B^2 = -I_n$. Montrer que A et B sont semblables dans $M_n(\mathbb{R})$

21) X 2024

1) Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

   Indication : Soit $w_n = e^{i\sqrt{n}}$, faire un DL de $w_{n+1} - w_n$
2) Etudier sa convergence absolue

Indication : Déterminer les intervalles sur lesquels $\left|\sin\sqrt{n}\right| \geq \dfrac{1}{2}$ et déterminer leur longueur.

22) ENS 2024

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose $\forall x \in \mathbb{R} \quad Q(x) = e^{-x}\int_0^x P(t)e^t\, dt$

Montrer que Q est une fonction polynôme si et seulement si $\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k P^{(k)}(0) = 0$

23) ENS 2025

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle positive telle que $u_1 > 0$ et $\sum u_n$ diverge. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

Montrer que $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$ converge

24) ENS 2025

Soit $a_n = card\left\{ \left(x_1, \ldots, x_n\right) \in \{-1, 0, 1\}^n \ , \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \frac{3n}{4} \right\}$. Montrer que $a_n \sim 3^n$

Indication : Montrer que $P\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 < \frac{3n}{4} \right) \to 1$ quand $n \to +\infty$

25) X-ESPCI 2025

Soit $r \in [0,1]$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$

1) Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|P\left(r e^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta = \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2 r^{2k} \leq \underset{\theta\in[0,2\pi]}{Sup} \left|P\left(e^{i\theta}\right)\right|^2$

2) Soit $f \in C^0([0, 2\pi], \mathbb{C})$. Que vaut $\lim_{p\to+\infty} \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p \right)^{1/p}$?

3) Montrer que $\underset{|z|\leq 1}{Sup} |P(z)| = \underset{|z|=1}{Sup} |P(z)|$

26) X-ESPCI 2025

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer un équivalent lorsque $t \to +\infty$ de $\int_0^1 \sin^2(2xt)\, x^{n-2}\, dx$

27) X-ESPCI 2025

1) Montrer l'existence d'une norme $\|.\|$ sur $M_n(\mathbb{R})$ telle que
$\exists C > 0 \quad \forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2 \quad \|AB\| \leq C\|A\|\,\|B\|$ Montrer alors qu'on peut définir
$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$ pour $A \in M_n(\mathbb{R})$

Dans la suite de l'exercice, on pose $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $R = \frac{1}{2} I_2$

2) Calculer $tr\left(R \exp\left(i\left(sH + tK\right)\right)\right)$ pour $(s, t) \in \mathbb{R}^2$

3) Montrer qu'il n'existe pas de variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que
$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2 \quad tr\left(R \exp\left(i\left(sH + tK\right)\right)\right) = E\left(e^{i(sX + tY)}\right)$

Indication : étudier le cas particulier $t = 0$

28) X-ESPCI 2025

Soient $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ $\exists D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale telles que
$A = P^T P$ et $B = P^T D P$

Soient $(A, B) \in \left(S_n^{++}(\mathbb{R})\right)^2$, soient $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Montrer que
$\det(\alpha A + \beta B) \geq (\det A)^\alpha (\det B)^\beta$

29) ENS 2025

Soient $(M,N)\in\left(M_2(\mathbb{C})\right)^2$ telles que $MN+NM=I_2$; $M^2=0$; $N^2=0$

Montrer $\exists P\in GL_2(\mathbb{C})$ tel que $M=P\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}P^{-1}$ et $N=P\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}P^{-1}$

30) X-ESPCI 2025 (facile)

Soit $v\in\mathbb{R}^n$. On pose $h(v)=I_n-2\,\dfrac{v\,v^T}{\|v\|^2}$. Que représente $h(v)$ géométriquement ?

Soit $e\in\mathbb{R}^n$ tel que $\|e\|=1$. Montrer que $h\left(v-\|v\|e\right)v=\|v\|e$

31) X-ESPCI 2025

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement supérieurs à 1. On pose

$\forall n\in\mathbb{N}\quad t_n=\sqrt{a_0+\sqrt{a_1+\sqrt{a_2+\cdots\sqrt{a_n}}}}$. Soit $L=\lim\limits_{n\to+\infty}\underset{k\geq n}{Sup}\left(\dfrac{\ln(\ln(a_k))}{k}\right)$. Pourquoi cette limite existe-t-elle ?

On suppose que $L>\ln(2)$. Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Indication : considérer $\alpha\in\left]\ln(2),L\right[$ et montrer qu'il existe une infinité d'entiers n_j tels que $\dfrac{\ln\left(\ln\left(a_{n_j}\right)\right)}{n_j}>\alpha$.

32) X-ESPCI 2025

Soit $\gamma(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$. On admet que $\int_{\mathbb{R}}\gamma=1$.

On considère une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes de même loi telles que $P(X_k=1)=P(X_k=-1)=\dfrac{1}{2}$. On pose $S_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}X_k$

1) Calculer $\int_{\mathbb{R}}x^k\gamma(x)\,dx$

2) Montrer que si p est impair, $E\left(S_n^p\right)=\int_{\mathbb{R}}x^p\,\gamma(x)\,dx$

3) Soit $P\in\mathbb{R}[X]$, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}E\left(P(S_n)\right)=\int_{\mathbb{R}}P(x)\,\gamma(x)\,dx$ (théorème Limite Central)

   Indication : Montrer que $E\left(S_n^{2k}\right)=(2k-1)E\left(S_n^{2k-2}\right)+o(1)$ lorsque $n\to+\infty$