Corrigé ex 17 analyse (fin)

$E = C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f \in E$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\varphi(f)(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$

1) et 2) traitées - $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$

3) on pose $P_n : x \mapsto x^n$

on vérifie facilement que $\varphi(P_{n-1}) = \frac{2^n-1}{n} P_n$

donc $P_n = \varphi\left(\frac{n}{2^n-1} P_{n-1}\right)$

4) F = fonctions polynômes

G = fonctions polynômes qui s'annulent en 0

posons $\tilde{\varphi} : F \to G$
$f \mapsto \varphi(f)$

(remarquons que si $f \in F$ alors $\varphi(f) \in G$

car si : $f = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k$

$\varphi(f) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{2^{k+1}-1}{k+1} P_{k+1} \in F$

et $\varphi(f)(0) = 0$)

$\operatorname{Ker}\tilde{\varphi} = F \cap \operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$

$\tilde{\varphi}$ est injective.

Soit $g \in G$, on cherche $f \in F$ tel que $\varphi(f) = g$

$g = \sum_{k\geq 1}^{n} a_k P_k$ (pas de terme constant) et $P_k = \varphi\left(\frac{k}{2^k-1} P_{k-1}\right)$ pour $k \geq 1$

donc $g = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi\left(\frac{k}{2^k-1} P_{k-1}\right) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{k}{2^k-1} P_{k-1}\right) = \tilde{\varphi}(f)$ avec $f \in F$

donc $\tilde{\varphi}$ est surjective donc bijective.

5) Soit $H = \{g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ g(0) = 0\}$

Il est clair que $\operatorname{Im}\varphi \subset H$

réciproquement, soit $g \in H$, g est C^1 et $g(0) = 0$

analyse : on cherche $f \in E$ tel que $g = \varphi(f)$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$

$g'(x) = 2f(2x) - f(x)$

$\frac{1}{2} g'\left(\frac{x}{2}\right) = f(x) - \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right)$

on montre par récurrence que $\frac{1}{2^k} g'\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{k-1}} f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - \frac{1}{2^k} f\left(\frac{x}{2^k}\right)$
$(k \geq 1)$

donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} g'\left(\frac{x}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - \frac{1}{2^k} f\left(\frac{x}{2^k}\right)$

somme telescopique

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} g'\left(\frac{x}{2^k}\right) = f(x) - \frac{1}{2^n} f\left(\frac{x}{2^n}\right) \to f(x)$ $n \to +\infty$

donc $\sum \frac{1}{2^k} g'\left(\frac{x}{2^k}\right)$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} g'\left(\frac{x}{2^k}\right) = f(x)$

f est donc unique.

<u>synthèse</u> Soit $g \in H$, g est C^1 et $g(0) = 0$

posons $\forall x \in \mathbb{R}$ $\underline{f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} g'\left(\frac{x}{2^k}\right)}$

montrons que $\varphi(f) = g$

d'abord il faut montrer que cette série converge simplement

. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. APCR $\left|\frac{x}{2^k}\right| \leq 1$

g' est continue donc bornée sur $[-1,1]$ $\left|g'\left(\frac{x}{2^k}\right)\right| \leq M$ APCR

donc $\left|\frac{1}{2^k} g'\left(\frac{x}{2^k}\right)\right| \leq \frac{M}{2^k}$ série convergente donc $\sum \frac{1}{2^k} g'\left(\frac{x}{2^k}\right)$ converge.

pour la CN, Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et $x \in [a,b]$

$|x| \leq c = \max(|a|, |b|)$

APCR (qui ne dépend pas de x) $\frac{c}{2^k} \leq 1$

donc $\left|\frac{x}{2^k}\right| \leq 1$ g' est bornée sur $[-1,1]$ $\left|g'\left(\frac{x}{2^k}\right)\right| \leq M$

$\left|\frac{1}{2^k} g'\left(\frac{x}{2^k}\right)\right| \leq \frac{M}{2^k}$) ne dépend pas de x

Si on pose $f_k : x \mapsto \frac{1}{2^k} g'\left(\frac{x}{2^k}\right)$

alors $\sum f_k$ CN sur tout $[a,b] \subset \mathbb{R}$ donc CU sur tout $[a,b] \subset \mathbb{R}$

donc $\underline{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$ (et les f_k sont continues)

$\sum f_k$ CN sur $[x, 2x]$ pour $x \in \mathbb{R}$ fixé

donc $\int_x^{2x} f(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \int_x^{2x} g'\left(\frac{t}{2^k}\right) dt$ (th d'interversion limite-intégrale sur un segment)

$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \left[2^k g\left(\frac{t}{2^k}\right)\right]_x^{2x} = \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - g\left(\frac{x}{2^k}\right) = g(x) - g\left(\frac{x}{2^n}\right) \to g(x)$ $(n \to +\infty)$ car $g(0) = 0$

donc $g(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$ donc $\underline{g \in \operatorname{Im} \varphi}$