4) on va écrire un DSE de $f(x)$

pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$ $\quad (1-4x)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}(-4x)^n$

$$(1-4x)^{1/2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-3)}{2^n \, n!} (-1)^{n-1}(-1)^n 4^n x^n$$

(après arrangement de l'expression)

$$= 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{2 \times 4 \times \cdots \times (2n-2) \times 2^n \, n!} 4^n x^n$$

$$(1-4x)^{1/2} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)! \, 2^n \, n!} x^n 4^n$$

$$(1-4x)^{1/2} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!\,(2n)}{2^{2n}(n!)^2} 4^n x^n$$

$$(1-4x)^{1/2} - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n-1)(n!)^2} x^n$$

$$f(x) = \frac{1}{2x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2n-1)(n!)^2} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2(2n-1)(n!)^2} x^{n-1}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n+2)!}{2(2n+1)((n+1)!)^2} x^n$$

$$\Rightarrow \quad u_n = \frac{(2n+2)!}{2(2n+1)((n+1)!)^2}$$