algèbre $\boxed{ex\ 1}$

$n \in \mathbb{N}^*$ $a = 2n+3$, $b = 5n-2$

on remarque que $5a - 2b = 19$

Soit $d = PGCD(a,b)$

$d | a$ et $d | b \Rightarrow d | 5a-2b \Rightarrow d | 19$

donc $d = 1$ ou $d = 19$ (car 19 est premier)

si $d = 19$ alors $a = 19a'$ et $b = 19b'$ avec a' et b' premiers entre eux

$19a' = 2n+3$

$2n = 19a' - 3$

a' est impair (car si a' était pair. $19a'-3$ serait impair)

$a' = 2k+1$

$2n = 19 \times 2k + 19 - 3$

$n = 19k + 8$

réciproquement, si $n = 19k+8$ $(k \in \mathbb{N})$

alors $a = 2 \times 19k + 16 + 3 = 2 \times 19k + 19 = 19(2k+1)$

$b = 5 \times 19k + 40 - 2 = 5 \times 19k + 38 = 19(5k+2)$

$19 | a$ et $19 | b$ donc $d = 19$ (car $d = 1$ ou 19)

Conclusion: Si $n = 19k+8$ $(k \in \mathbb{N})$

alors $d = 19$

sinon $d = 1$

Ex 2 $S(n,p)$ nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ $S(n,0)=0$ $\forall p\in\mathbb{N}^*$ $S(0,p)=0$ et $S(0,0)=1$

1). $\underline{p>n}$, il y a au moins un élément de $[\![1,p]\!]$ qui n'a pas d'antécédent donc $\underline{S(n,p)=0}$ $(p>n)$

- $\underline{p=1}$ tous les éléments de $[\![1,n]\!]$ ont la même image $\underline{S(n,1)=1}$

- $\underline{p=2}$ il y a 2^n applications de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,2]\!]$ (2 choix pour chacune des valeurs de $f(1), f(2)..., f(n)$). il faut enlever l'application où tous les éléments de $[\![1,n]\!]$ ont pour image 1 et celle où tous les éléments de $[\![1,n]\!]$ ont pour image 2

  $\underline{S(n,2)=2^n-2}$

- $\underline{n=p}$: une surjection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est une bijection il y a $n!$ bijections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ donc $\underline{S(n,n)=n!}$

- $\underline{n=p+1}$ il y a un élément de $[\![1,p]\!]$ qui a 2 antécédents, les autres ont un antécédent

  p choix pour l'élément de $[\![1,p]\!]$ qui a 2 antécédents

  $\binom{p+1}{2}$ choix pour les 2 antécédents de cet élément

  et ensuite, $(p-1)!$ choix d'une bijection d'un ensemble à $p-1$ éléments dans un ensemble à $p-1$ éléments (ayant retiré l'élément de $[\![1,p]\!]$ qui a 2 antécédents et ces 2 antécédents dans $[\![1,p+1]\!]$)

  au final: $p\binom{p+1}{2}(p-1)!$ choix

  $$\underline{S(p+1,p)=p\,\frac{(p+1)!}{2}}$$

2) $p\in\mathbb{N}^*$, $n\in\mathbb{N}^*$

en 2

pour former une surjection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$,

on choisit un élément de $[\![1,p]\!]$ appelé y_i (p choix)

soit il a un unique antécédent x_j et alors on forme une surjection de $[\![1,n]\!]\setminus\{x_j\}$ dans $[\![1,p]\!]\setminus\{y_i\}$ ($S(n-1,p-1)$ choix)

Soit il a plusieurs antécédents et alors on forme une surjection de $[\![1,n]\!]\setminus\{x_j\}$ dans $[\![1,p]\!]$ ($S(n-1,p)$ choix)

on a bien alors

$$\underline{S(n,p) = p\left[S(n-1,p) + S(n-1,p-1)\right]}$$

(valable pour $n=1$ ou $p=1$ aussi)

3) on fait une récurrence sur n.

$P(n)$ $\forall p \in \mathbb{N}$ $S(n,p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^n$

pour $n=0$: si $p=0$ $S(0,0)=1$

et $\sum_{k=0}^{0} (-1)^k \binom{0}{k} (0-k)^0 = 1$ (convention $0^0=1$)

donc la formule est vraie.

si $p \geq 1$ $S(0,p)=0$

$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^0 = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} = (1+(-1))^p = 0$

donc $P(0)$ est vraie.

Supposons $P(n-1)$

on va montrer $P(n)$ ($n \geq 1$)

$S(n,0)=0$ et $\sum_{k=0}^{0} (-1)^k \binom{0}{k} (0-k)^n = 0$ car $n \geq 1$ ($0^n=0$)

formule vraie pour $p=0$

Supposons $p \geq 1$

$S(n,p) = p\left[S(n-1,p) + S(n-1,p-1)\right]$

$= p\left[\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^{n-1} + \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \binom{p-1}{k} (p-1-k)^{n-1}\right]$

d'après $P(n-1)$.

en2

$$S(n,p) = p\left[\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} (p-k)^{n-1} + \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} \binom{p-1}{k-1} (p-k)^{n-1}\right]$$

$$= p\left[p^{n-1} + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k (p-k)^{n-1} \left[\binom{p}{k} - \binom{p-1}{k-1}\right]\right]$$

$$= p\left[p^{n-1} + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k (p-k)^{n-1} \binom{p-1}{k}\right]$$

$$= p\sum_{k=0}^{p} (-1)^k (p-k)^{n-1} \binom{p-1}{k} = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k (p-k)^{n-1}\, p \binom{p-1}{k}$$

or $p\binom{p-1}{k} = (p-k)\binom{p}{k}$

donc $S(n,p) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k (p-k)^n \binom{p}{k}$ c'est bien $P(n)$.

Algèbre $\boxed{\text{ex } 6}$

(⇒) Si u est une homothétie

$u = \lambda Id_E$ $\lambda \neq 0$ car sinon $u = 0$

$u = v \circ w$

$v \circ w = \lambda Id$

$\frac{v}{\lambda} \circ w = Id$

donc $w = \left(\frac{v}{\lambda}\right)^{-1}$

donc $w \circ \frac{v}{\lambda} = Id$

donc $w \circ v = Id = u$.

(⇐) Supposons $\forall v, w$ $u = v \circ w \Rightarrow u = w \circ v$.

Soit f un autom.

$u = \underbrace{u \circ f} \circ f^{-1} = f^{-1} \circ \underbrace{u \circ f}$

donc $f \circ u = u \circ f$ donc u commute avec f.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, f est la limite d'une suite d'endom ~~⇒~~ bijectif.

$f_k = f - \frac{1}{k} Id_E$ inversible APCR car f n'a qu'un nb finie de vlp.

$f_k \circ u = u \circ f_k$

$f \circ u - \frac{1}{k} u = u \circ f - \frac{1}{k} u$, $\Rightarrow f \circ u = u \circ f$.

u commute avec tout endom.

passons aux matrices : $U = Mat_B(u)$ B base canonique.

U commute avec E_{kl}

$\Rightarrow U = \lambda I_n$.

en effet $U E_{kl} = \begin{array}{c} \\ k \end{array}\left(\begin{array}{ccc} & \overset{l}{u_{1k}} & \\ (0) & \vdots & (0) \\ & u_{kk} & \\ & \vdots & \\ & u_{nk} & \end{array}\right)$

$E_{kl} U = \begin{array}{c} \\ k \end{array}\left|\begin{array}{c} \\ u_{l1} \dots u_{ll} - u_{ln} \end{array}\right|$ $\Rightarrow u_{kk} = u_{ll}$ et tous les autres coeff sont nuls donc $U = \lambda I_n$

algèbre $\boxed{\text{ex } 8}$

$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$, $A = PB$

montrer que $\ker A = \ker B$.

1) $X \in \ker B$, $BX = 0$ $\quad PBX = 0 \Rightarrow AX = 0 \Rightarrow X \in \ker A$.

$\ker B \subset \ker A$ et $B = P^{-1}A \Rightarrow \ker A \subset \ker B$.

donc $\ker B = \ker A$.

2) Supposons $\ker A = \ker B$.

$A = Mat_B(f)$ $\quad B = Mat_B(g)$ $\quad \ker f = \ker g$.

il faut trouver h bijective telle que $f = h \circ g$.

Soit S un supplémentaire de $\ker g$

$\mathbb{C}^n = S \oplus \ker g$

$B' = (\underbrace{e'_1 \dots e'_p}_{\in S}, \underbrace{e'_{p+1} \dots, e'_n}_{\in \ker g})$ base adapté

$$Mat_{B'}(g) = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (p = rg\, B)$$
$$\qquad\qquad \underbrace{\qquad}_{p} \quad \underbrace{\qquad}_{n-p}$$

$(e'_1, \dots e'_p)$ base de S et g est injective sur S

donc $(g(e'_1) \dots g(e'_p))$ est libre de bon cardinal donc c'est une base de S

posons $e''_1 = g(e'_1) \dots e''_p = g(e'_p)$

h doit vérifier $f(e'_1) = h(g(e'_1))$, ..., $f(e'_p) = h(g(e'_p))$

posons $h(e''_1) = f(e'_1)$, ..., $h(e''_p) = f(e'_p)$

$e''_{p+1} = e'_{p+1}$, ..., $e''_n = e'_n$.

$B'' = (\underbrace{e''_1, \dots e''_p}_{\text{base de } S}, \underbrace{e''_{p+1}, \dots, e''_n}_{\text{base de } \ker g})$ $\quad$ B'' base de $\mathbb{C}^n$ (th de recollement de bases)

on a bien $f(e'_1) = h \circ g(e'_1)$, ..., $f(e'_p) = h \circ g(e'_p)$

--

ex 8 suite

on pose aussi : $h(e''_{p+1}) = h(e'_{p+1}) = e'_{p+1} = e''_{p+1}$

$\dots$ $h(e''_n) = e''_n$

h est entièrement définie par l'image des vecteurs de la base B''

$$\mathrm{Mat}_{B''}(h) = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} f(e'_1) \dots f(e'_p) & h(e''_{p+1}) \dots h(e''_n) \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} C & (0) \\ \hline D & I_{n-p} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} e''_1 \\ \vdots \\ e''_p \\ \vdots \\ e''_n \end{array}$$

on a bien $f = h \circ g$

$\mathrm{Ker} f = \mathrm{Ker} g$ donc $(f(e'_1) \dots f(e'_p))$ est libre car f est injective sur S

donc C est inversible donc $\det C \neq 0$

donc $\det h \neq 0$ h est bijective

algèbre fen 9

1) f inversible $f\circ g\circ f = f \Rightarrow f\circ g = Id$.

et $f\circ g = g\circ f$ assure que $g = f^{-1}$

si $f = 0$ $\quad g\circ f\circ g = g \Rightarrow g = 0$

2) si g existe

analyse : $x \in E$ $\quad x = x_1 + x_2$ $\quad x_1 \in \ker f$

$x_2 \in \operatorname{Im} f$

$f(x) = f(x_2)$ $\quad x_2 = f(x_3)$

$g(x) = g(x_1) + g(x_2)$

$f\circ g(x) = f\circ g(x_1) + f\circ g(x_2)$

$= \underbrace{g\circ f(x_1)}_{=0} + g\circ f(x_2)$

$= f\circ g\circ f(x_3) = f(x_3) = x_2$

$\Rightarrow x_2 = f\circ g(x)$

$x_1 = x - f\circ g(x)$

synthèse : $x \in E$ $\quad$ posons $x_1 = x - f\circ g(x) = x - g\circ f(x)$

$x_2 = f\circ g(x)$

on a bien $x_1 + x_2 = x$

$f(x_1) = f(x) - f\circ g\circ f(x) = 0$ $\quad x_1 \in \ker f$

$x_2 \in \operatorname{Im} f$ ok.

donc $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

3) Supposons $E = \ker f \oplus \operatorname{Im} f$.

$\operatorname{Im} f$ est stable par f

$\tilde{f}$ endom induit par f sur $\operatorname{Im} f$

$\tilde{f} : \operatorname{Im} f \to \operatorname{Im} f$

$x \mapsto \tilde{f}(x) = f(x)$

$\tilde{f}$ bijectif ?

Soit $y \in \mathrm{Im} f$

alors $\exists x \in E$, $y = f(x)$

$x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Ker} f$, $x_2 \in \mathrm{Im} f$

$y = f(x_2)$ $x_2 \in \mathrm{Im} f$

$= \tilde{f}(x_2)$

donc $\tilde{f}$ est surjective

Soit $x \in \mathrm{Ker} \tilde{f}$. $f(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Im} f$

donc $x \in \mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$

$\tilde{f}$ est inj

donc $\tilde{f}$ est bij.

Considérons g telle que $g_{|\mathrm{Ker} f} = 0$

$g_{|\mathrm{Im} f} = \tilde{f}^{-1}$

c'est à dire $\forall x \in \mathrm{Ker} f$ $g(x) = 0$

$\forall x \in \mathrm{Im} f$, $g(x) = \tilde{f}^{-1}(x)$

g est bien définie sur E.

$x = x_1 + x_2$ $g(x) = g(x_2) = \tilde{f}^{-1}(x_2)$

$x_1 \in \mathrm{Ker} f$

$x_2 \in \mathrm{Im} f$.

$f \circ g(x) = f \circ g(x_2) = f \circ \tilde{f}^{-1}(x_2)$

$\tilde{f}^{-1}(x_2) \in \mathrm{Im} f$ donc $f(\tilde{f}^{-1}(x_2)) = \tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(x_2))$

$= x_2$

donc $f \circ g(x) = x_2$

$f(x) = f(x_2)$

donc $g \circ f(x) = g \circ \underbrace{f(x_2)}_{\in \mathrm{Im} f} = \tilde{f}^{-1}(\tilde{f}(x_2)) = x_2$

$g \circ f = f \circ g$ ok.

$g \circ f \circ g(x) = g(x_2) = g(x)$

...

$g \circ f(x) = x_2$ ok.

$f \circ g \circ f(x) = f(x_2) = f(x)$

en 9 suite

4) , on a donc

f admet un pseudo-inv si $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$

en dim finie, on va mq $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$
$\iff rg f = rg f^2$

$\Rightarrow$ on a toujours $\mathrm{Im} f^2 \subset \mathrm{Im} f$ $\quad \ker f \subset \ker f^2$

donc $rg f^2 \leq rg f$.

Supposons $E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$.

$x \in \ker f^2 \quad f^2(x) = 0$

$f(f(x)) = 0 \quad f(x) \in \ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$

donc $f(x) = 0$ donc $x \in \ker f$

donc $\ker f = \ker f^2$

th du rang $\dim \mathrm{Im} f^2 = \dim \mathrm{Im} f$

donc $rg f = rg f^2$.

$\Leftarrow$ Supposons $rg f = rg f^2$

alors : $\ker f = \ker f^2$ (th du rang)

$x \in \ker f \cap \mathrm{Im} f \quad f(x) = 0 \;\; \& \;\; x = f(y)$

$f^2(y) = 0 \quad y \in \ker f^2$

donc $y \in \ker f$

donc $f(y) = 0$

donc $x = 0$

$\ker f \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$

th du rang !

$E = \ker f \oplus \mathrm{Im} f$.

algèbre $\boxed{\text{ex } 10}$

$A \in S_N^{++}(\mathbb{R})$ $E = \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{R})$ $X_0 \in E$, $X_0 \neq 0$

$\varphi_0 : \{0\} \to E$ $\qquad$ $\varphi_n : \mathbb{R}_{n-1}[X] \to E$

$P \mapsto 0$ $\qquad$ $P \mapsto P(A) A X_0$.

1) φ_n linéaire. $\varphi_n(\alpha P + Q) = (\alpha P + Q)(A) A X_0$

$= (\alpha P(A) + Q(A)) A X_0$

$= \alpha P(A) A X_0 + Q(A) A X_0$

$= \alpha \varphi_n(P) + \varphi_n(Q)$

Soit $Y \in \mathrm{Im}\,\varphi_n$

$\exists P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $Y = P(A) A X_0$

mais $P \in \mathbb{R}_n[X]$ aussi donc $Y \in \mathrm{Im}\,\varphi_{n+1}$

$\mathrm{Im}\,\varphi_n \subset \mathrm{Im}\,\varphi_{n+1}$

donc $\mathrm{rg}\,\varphi_n \leq \mathrm{rg}\,\varphi_{n+1}$

$(\mathrm{rg}\,\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $\nearrow$.

2) Soit $F = \{k \in \mathbb{N},\ \mathrm{rg}\,\varphi_k = k\}$

$F \neq \emptyset$ car $0 \in F$ $(\mathrm{rg}\,\varphi_0 = 0)$

$F \subset \mathbb{N}$ et $\mathrm{Im}\,\varphi_k \subset E \to \mathrm{rg}\,\varphi_k \leq N$

$\mathrm{rg}\,\varphi_k$ est majoré par N donc si $k \in F$ alors $k \leq N$

donc F est majoré donc F admet un plus grand elt

$m(X_0) = \max F$. $m(X_0)$ existe d'après ce qui précède

tous les elt de F sont $\leq N$ donc $m(X_0) \leq N$

$\varphi_1 : \mathbb{R}_0[X] \to E$

$P \mapsto P(A) A X_0$

$P \in \mathbb{R}_0[X]$ $P = \alpha$ $\varphi_1(P) = \alpha A X_0 \in \mathrm{Vect}(A X_0)$

A est inversible et $X_0 \neq 0$ donc $A X_0 \neq 0$

donc $\dim \mathrm{Vect}(A X_0) = 1$

donc $\mathrm{Im}\,\varphi_1 \subset \mathrm{Vect}(A X_0) \to \mathrm{rg}\,\varphi_1 \leq 1$

de plus $\varphi_1 \neq 0$ $(\varphi_1(1) = A X_0 \neq 0)$

en 10 suite

donc $\operatorname{rg}\varphi_1 = 1$ donc $1 \in F$

donc $m(X_0) \geq 1$.

3) Supposons que X_0 soit vecteur propre de A

$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \; AX_0 = \lambda X_0$ $\quad \lambda \neq 0$ car $AX_0 \neq 0$

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ $\quad Q = XP$ $\quad Q(A) = P(A)A = AP(A)$

on peut montrer que $Q(A)X_0 = Q(\lambda)X_0 = \lambda P(\lambda)X_0$

donc $\varphi_n(P) = \lambda P(\lambda) X_0 \in \operatorname{Vect}(X_0)$

$\operatorname{Im}\varphi_n \subset \operatorname{Vect}(X_0)$ donc $\operatorname{rg}\varphi_n \leq 1$

et $\operatorname{rg}\varphi_n \geq 1$ $\quad (\varphi_n \neq 0$ car $\varphi_n(1) = AX_0 \neq 0)$

donc $\operatorname{rg}\varphi_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

donc $m(X_0) = 1$

4) Soit $Y \in \operatorname{Im}\varphi_n$, $\; Y = P(A)AX_0$ $\quad P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

$P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ $\quad P(A)A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} A^k$

$Y = \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} A^k X_0$ $\quad \operatorname{Im}\varphi_n \subset \operatorname{Vect}(AX_0, \dots, A^n X_0)$

$\Big(\forall k \in [\![1, n]\!] \quad A^k X_0 \in \operatorname{Im}\varphi_n$ (en prenant $P = X^{k-1}$) $\Big)$ inutile.

donc $\operatorname{Im}\varphi_n = \operatorname{Vect}(AX_0, \dots, A^n X_0)$

$\operatorname{rg}\varphi_n \leq n$. car $\dim \operatorname{Vect}(AX_0, \dots, A^n X_0) \leq n$.

5) $k=0$ $\operatorname{rg}\varphi_0 = 0$; $k=1$: $\operatorname{rg}\varphi_1 = 1$

Montrons que $\operatorname{rg}\varphi_{k+1} \leq \operatorname{rg}\varphi_k + 1$

Soit $P \in \operatorname{Ker}\varphi_k$ $\quad \varphi_k(P) = 0$ $\quad P(A)AX_0 = 0$

$P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$ mais $P \in \mathbb{R}_k[X]$ aussi donc $\varphi_{k+1}(P) = 0$

$\operatorname{Ker}\varphi_k \subset \operatorname{Ker}\varphi_{k+1}$

$\dim \operatorname{Ker}\varphi_k \leq \dim \operatorname{Ker}\varphi_{k+1}$

$k - \operatorname{rg}\varphi_k \leq k+1 - \operatorname{rg}\varphi_{k+1}$

$\operatorname{rg}\varphi_{k+1} \leq \operatorname{rg}\varphi_k + 1$.

Supposons que pour k_0 $rg\, \varphi_{k_0} < k_0$ en 10 suite

$P(k)$: $k \geq k_0 \Rightarrow rg\, \varphi_k < k$.

$P(k_0)$ vraie.

Supposons $P(k)$ $rg\, \varphi_k < k$

$rg\, \varphi_{k+1} \leq rg\, \varphi_k + 1 < k+1$

si pour $k \leq m(X_0)$ on a $rg\, \varphi_k < k$

alors $rg\, \varphi_{m(X_0)} < m(X_0)$ pas possible

donc pour $\underline{k \in [\![0, m(X_0)]\!]}$, $rg\, \varphi_k \geq k$

et de plus $rg\, \varphi_k \leq k$ donc $\underline{rg\, \varphi_k = k}$

si $k > m(X_0)$ alors $k \geq m(X_0)+1$

$rg\, \varphi_{m(X_0)} = m(X_0)$ et $rg\, \varphi_{m(X_0)+1} \neq m(X_0)+1$

$rg\, \varphi_{m(X_0)+1} < m(X_0)+1$

donc pour $\underline{k \geq m(X_0)+1, rg\, \varphi_k < k}$

6) $p = \text{card}\, S_p(A)$ $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de A

$E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}$ car A est diagonalisable.

$X_0 = X_1 + \dots + X_p$, $\forall i \in [\![1, p]\!]$ $X_i \in E_{\lambda_i}$

Soit $Y \in \text{Im}\, \varphi_n$. $Y = P(A)\, A\, X_0$ $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

$Y = P(A) A X_1 + \dots + P(A) A X_p = P(\lambda_1)\lambda_1 X_1 + \dots + P(\lambda_p)\lambda_p X_p$.

$\text{Im}\, \varphi_n \subset \text{Vect}(X_1, \dots, X_p)$ de dim p car $(X_1, \dots, X_p)$ est libre.

$rg\, \varphi_n \leq p$.

en particulier $rg\, \varphi_{m(X_0)} \leq p$.

$\underline{rg\, \varphi_{m(X_0)} = m(X_0) \leq p = \text{card}(Sp(A))}$

algèbre $\boxed{\text{ex } 12}$

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, λ valeur propre de A

U vecteur propre de A associé à λ. unitaire $\qquad M = \begin{pmatrix} A & UU^T \\ UU^T & A \end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} U \\ \alpha U \end{pmatrix}$

Remarquons que M est symétrique donc diagonalisable.

$MY = \mu Y \iff \begin{cases} AU + UU^T\alpha U = \mu U \\ UU^TU + \alpha AU = \mu\alpha U \end{cases}$ $\qquad U^TU = \|U\|^2 = 1$

$\iff \begin{cases} \lambda U + \alpha U = \mu U \\ U + \alpha\lambda U = \mu\alpha U \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda + \alpha = \mu \\ 1 + \alpha\lambda = \mu\alpha \end{cases}$ car $U \neq 0$

$1 + \alpha\lambda = \mu\alpha = (\lambda+\alpha)\alpha \Rightarrow \alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm 1$

réciproquement $\begin{pmatrix} U \\ U \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} U \\ -U \end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de M associés aux valeurs propres $\lambda+1$ et $\lambda-1$

Si W est un autre vecteur propre de A associé à λ, unitaire et orthogonal à U

$M\begin{pmatrix} W \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AW + UU^TW \\ UU^TW + AW \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AW \\ AW \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} W \\ W \end{pmatrix}$ car $U^TW = 0$

idem $M\begin{pmatrix} W \\ -W \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} W \\ -W \end{pmatrix}$

on considère alors une base de vecteurs propres de A

$B = (X_1, .., X_k, X_{k+1}, .. X_n)$ avec $(X_1, .., X_k)$ base de $\ker(A - \lambda I_n)$ (et $X_1 = U$)

$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ -X_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ X_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ -X_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} X_k \\ X_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_k \\ -X_k \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de M. et forment une famille libre car $(X_1, .., X_k)$ libre.

de plus pour $i \in [\![k+1, n]\!]$

$M\begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AX_i \\ UU^TX_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i X_i \\ 0 \end{pmatrix}$ car $X_i \perp U$ (X_i vecteur propre associé à $\lambda_i \neq \lambda$)

$\begin{pmatrix} X_i \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de M. et idem $\begin{pmatrix} 0 \\ X_i \end{pmatrix}$

Une base de vecteurs propres de M est donc

$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} X_1 \\ -X_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} X_2 \\ X_2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} X_2 \\ -X_2 \end{pmatrix}; \cdots \begin{pmatrix} X_k \\ X_k \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} X_k \\ -X_k \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} X_{k+1} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ X_{k+1} \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} X_n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ X_n \end{pmatrix}$

la liberté se montre facilement et il y a bien $2n$ vecteurs.

Mines 2025

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $A^{n-1} \neq 0$ et $A^n = 0$

en 19

$C(A) = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA \}$

1) mq $\exists X_0 \in \mathbb{R}^n$, $(X_0, AX_0, \dots, A^{n-1}X_0)$ base de $\mathbb{R}^n$.

2) en déduire que $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est une base de $C(A)$

(que peut-on dire de $\underset{\in C(A)}{M} \mapsto MX_0$?)

---

1) prendre $X_0 \notin \mathrm{Ker}\, A^{n-1}$ $\quad A^{n-1}X_0 \neq 0$

$\alpha_0 \dots, \alpha_{n-1}$ tq $\quad \alpha_0 X_0 + \alpha_1 AX_0 + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} X_0 = 0$ $(*)$

on $\times$ par $\cancel{X_0}\, A^{n-1}$: $\quad \alpha_0 A^{n-1} X_0 = 0 \Rightarrow \alpha_0 = 0$

$P(k)$: $\alpha_0 = 0 \dots, \alpha_k = 0$ $\quad (k \leq n-1)$

$P(0)$ vraie

Supposons $P(k)$

$(*)$ $\quad \alpha_{k+1} AX_0^{k+1} + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} X_0 = 0$

on $\times$ par $A^{n-1-k-1}$ $\quad \alpha_{k+1} A^{n-1} X_0 = 0 \Rightarrow \alpha_{k+1} = 0$

$P(k+1)$ vraie.

famille libre de card n.

2) $\varphi : C(A) \to \mathbb{R}^n$
$\quad M \mapsto MX_0$ $\quad$ rem que $C(A)$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

si $M \in C(A)$ alors $\forall k$ $\quad A^k M = MA^k$.

Soit $M \in \mathrm{Ker}\, \varphi$ $\quad MX_0 = 0$ $\quad X_0 \in \mathrm{Ker}\, M$.

$MAX_0 = AMX_0 = 0$ $\quad AX_0 \in \mathrm{Ker}\, M$

$MA^k X_0 = A^k M X_0 = 0$ $\quad A^k X_0 \in \mathrm{Ker}\, M$.

$\mathrm{Ker}\, M$ contient $(X_0, AX_0, \dots, A^{n-1}X_0)$ qui engendre E

donc $\mathrm{Ker}\, M = E$ donc $M = 0$

donc φ est injective

donc $\dim C(A) \leq \dim \mathbb{R}^n = n$.

Montrons que $(I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre.

$\alpha_0 I_n + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} = 0$

on $\times$ par X_0 à droite

$\alpha_0 X_0 + \alpha_1 A X_0 + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} X_0 = 0$

par liberté de $(X_0, \dots, A^{n-1} X_0)$

on a $\alpha_0 = 0 \dots \alpha_{n-1} = 0$

donc $B = (I_n, A, \dots, A^{n-1})$ est libre dans $C(A)$

donc $\dim C(A) \geq n$

donc $\dim C(A) = n$

et B est une base de $C(A)$.

algèbre $\boxed{\text{ex } 22}$

$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,dt$ pour $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ $\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!$

1) déjà vu.

2) $F = \mathrm{Vect}(X, X^2 \dots X^n)$

p_F projection orthogonale sur F

$Q = p_F(1)$ $Q = \sum_{k=1}^{n} a_k X^k$ $(Q(0) = 0)$

$P = 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k (X+1)(X+2)\dots(X+k)$

2) $1 - Q = 1 - p_F(1) \in F^\perp$ donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$ $(1-Q|X^i) = 0$

$(1-Q|X^i) = (1|X^i) - \sum_{k=1}^{n} a_k (X^k|X^i) = i! - \sum_{k=1}^{n} a_k (k+i)! = 0$

donc $\sum_{k=1}^{n} a_k (k+i)! = i!$

or $P(i) = 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k (i+1)(i+2)\dots(i+k) = 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(i+k)!}{i!}$

$\Rightarrow$ $P(i) = 0$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$

or $\deg P = n$ et on a trouvé n racines $\neq$ de P

donc $P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - i)$

or on peut remarquer que $P(-1) = 1$ ($X+1$ est toujours présent dans $\sum a_k (X+1)\dots(X+k)$)

donc $1 = \lambda \prod_{i=1}^{n} (-1-i)$

$\Rightarrow$ $1 = \lambda (-1)^n (n+1)!$ $\Rightarrow$ $\lambda = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$

donc $P = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \prod_{i=1}^{n} (X - i)$

3) posons $R = -\alpha_1 X \dots - \alpha_n X^n$ avec $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

$R \in F$ $\int_0^{+\infty} (1 + \alpha_1 t + \dots + \alpha_n t^n)^2 e^{-t} dt = \|1 - R\|^2$

en faisant varier $\alpha_1 \dots \alpha_n$ dans $\mathbb{R}$, on fait varier R dans F

donc $\underset{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n}{\mathrm{Inf}} \int_0^{+\infty} (1+\alpha_1 t+\dots+\alpha_n t^n)^2 e^{-t}\,dt$

$= \underset{R\in F}{\mathrm{Inf}} \|1-R\|^2 = (d(1,F))^2 = \|1-P_F(1)\|^2 = \|1-Q\|^2$

$= \|1\|^2 - \|Q\|^2 = 1 - \|Q\|^2$

$\|Q\|^2 = (Q|Q) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k X^k \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_i X^i\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i a_k (X^k|X^i)$

$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i a_k (k+i)! = \sum_{i=1}^{n} a_i \Big(\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k (k+i)!}_{= i! \text{ d'après 2)}}\Big)$

$= \sum_{i=1}^{n} a_i\, i!$

or $P = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}\prod_{i=1}^{n}(X-i)$ donc $P(0) = \frac{(-1)^n \times \prod_{i=1}^{n}(-i)}{(n+1)!} = \frac{(-1)^n(-1)^n n!}{(n+1)!}$

$P(0) = \frac{1}{n+1}$

de plus $P(0) = 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k\, k!$

donc $(d(1,F))^2 = 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k\, k! = P(0) = \frac{1}{n+1}$

algèbre $\boxed{\text{ex } 23}$

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $q \in \mathbb{N}^*$, $A^q = I_n$

Montrer que $\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} \operatorname{tr}(A^k)$

$P = X^q - 1$ est annulateur de A et simplement scindé sur $\mathbb{C}$

(ses racines sont toutes distinctes, ce sont les

racines $q$ièmes de l'unité)

donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. et $Sp(A) \subset \{\text{racines de } P\}$.

notons $\lambda_1, \dots \lambda_n$ les valeurs propres

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des racines $q$ièmes de l'unité car racines de P

les valeurs propres de A^k sont $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$

$$\sum_{k=1}^{q} \operatorname{tr}(A^k) = \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^k = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{q} \lambda_j^k \right)$$

si $\lambda_j = 1$ $\sum_{k=1}^{q} \lambda_j^k = q$

si $\lambda_j \neq 1$, $\lambda_j^q = 1$ et $\sum_{k=1}^{q} \lambda_j^k = \frac{1 - \lambda_j^q}{1 - \lambda_j} = 0$

donc $\sum_{k=1}^{q} \operatorname{tr}(A^k) = q\, \omega(1)$ avec $\omega(1)$ l'ordre de multiplicité de 1 donc χ_A

or A est diagonalisable

donc $\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) = \omega(1)$

donc $\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} \operatorname{tr}(A^k)$

algèbre (en 25)

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$ $\quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & (0) & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$

1) $A = \mathrm{Mat}_B(f)$ $\quad B$ base canonique de $\mathbb{R}^n$

$\exists a \in \mathbb{R}^n$, $f^{n-1}(a) \neq 0$

Soit $B' = (f^{n-1}(a), f^{n-2}(a), \dots, f(a), a)$

Montrons que B' est libre.

Soient $\alpha_{n-1}, \alpha_{n-2}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ tels que

$$\alpha_{n-1} f^{n-1}(a) + \alpha_{n-2} f^{n-2}(a) + \dots + \alpha_1 f(a) + \alpha_0 a = 0 \quad (*)$$

on compose $(*)$ par f^{n-1}, tous les termes s'annulent sauf le dernier. On obtient $\alpha_0 f^{n-1}(a) = 0$ donc $\alpha_0 = 0$

$P(k)$: $\alpha_0 = 0, \dots, \alpha_{k-1} = 0, \alpha_k = 0$ $\quad (k \leq n-1)$

$P(0)$ est vraie

Supposons $P(k)$ pour $k \leq n-2$, on a alors

$$\alpha_{n-1} f^{n-1}(a) + \dots + \alpha_{k+1} f^{k+1}(a) = 0$$

on compose par $f^{n-1-(k+1)}$ on obtient $\alpha_{k+1} f^{n-1}(a) = 0$

d'où $\alpha_{k+1} = 0$ donc $P(k+1)$ vraie.

donc $P(n-1)$ est vraie donc tous les coeff sont nuls

B' est libre de cardinal n donc c'est une base de $\mathbb{R}^n$

et $\mathrm{Mat}_{B'}(f) = J$ donc A et J sont semblables.

2) $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $\quad AB = BA$ $\quad A = QJQ^{-1}$

$QJQ^{-1}B = BQJQ^{-1}$

$J(Q^{-1}BQ) = (Q^{-1}BQ)J$

$C = Q^{-1}BQ$ commute avec J.

$C = (c_{ij})$ $\quad J = (d_{ij})$ $\quad CJ = (\alpha_{ij})$

$d_{ij} = \delta_{i+1\, j}$ $\quad JC = (\beta_{ij})$

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=1}^{m} c_{ik} d_{kj} = \sum_{k=1}^{m} c_{ik} \delta_{k+1,j}$$

$$\beta_{ij} = \sum_{k=1}^{m} d_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{i+1,k} c_{kj}$$

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij} \iff \sum_{k=1}^{m} \delta_{i+1,k} c_{kj} = \sum_{k=1}^{m} c_{ik} \delta_{k+1,j}$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} c_{i+1,j} & \text{pour } i \leq m-1 \\ 0 & \text{pour } i = m. \end{cases}$$

$$JC = \begin{pmatrix} c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & & c_{mm} \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

$$CJ = \begin{pmatrix} 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1,m-1} \\ \vdots & c_{21} & c_{22} & & c_{2,m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & c_{m1} & c_{m2} & & c_{m,m-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } j = 1 \\ c_{i,j-1} & \text{pour } j \geq 2 \end{cases}$$

$c_{21} = 0$, $c_{31} = 0$ ..., $c_{m1} = 0$ → la 1ère colonne est $= 0$ sauf c_{11}

$c_{m1} = 0$ $c_{m2} = 0$ ... $c_{m,m-1} = 0$ → la dernière ligne est $= 0$ sauf c_{mm}

$c_{11} = c_{22}$, $c_{22} = c_{33}$ ... $c_{m-1,m-1} = c_{mm}$.

tous les termes diagonaux sont égaux.

$c_{i+1,j} = c_{i,j-1}$ pour $i \leq m-1$ et $j \geq 2$

(en particulier $c_{i+1,i+1} = c_{i,i}$)

$c_{i+1,i+2} = c_{i,i+1}$: $c_{12} = c_{23} = c_{34} = \cdots = c_{m-1,m}$

$c_{i+1,i+3} = c_{i,i+2}$: $c_{1,3} = c_{2,4} = c_{3,5} = \cdots = c_{m-2,m}$

C est de la forme

$$C = \begin{bmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & \gamma_n \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \gamma_2 \\ & (0) & & \ddots & \gamma_1 \\ & & & & \gamma_0 \end{bmatrix}$$

or $J^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & 0 \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix}$ ...

$$C = \sum_{k=0}^{m} \gamma_k J^k = P(J) \quad \text{avec } P = \sum_{k=0}^{m} \gamma_k X^k$$

$$B = QCQ^{-1} = Q\,P(J)\,Q^{-1} = P(QJQ^{-1}) = P(A)$$

algèbre $\boxed{\text{ex } 27}$

$p \in \mathbb{N}$ $\quad p \geq 2$ $\quad (u_n)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$

$u_{n+p} = u_{n+p-1} + \dots + u_n .$ $\quad P = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} X^k$ $\quad U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix}$

1) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & & & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ \vdots \\ u_{n+p-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n+p} \end{pmatrix} \qquad U_{n+1} = A U_n .$$

2) par récurrence $U_n = A^n U_0$

3) $$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} x & -1 & & & (0) \\ 0 & x & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & x & -1 \\ -1 & \cdots & & -1 & x-1 \end{vmatrix}$$

$C_1 \leftarrow C_1 + x C_2 + x^2 C_3 + \dots + x^{p-1} C_p$

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 0 & -1 & & & \\ \vdots & x & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & x & -1 \\ P(x) & & & & x-1 \end{vmatrix}$$

en développant par rapport à la 1ère colonne

$$\chi_A(x) = (-1)^{p+1} P(x) \begin{vmatrix} -1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (*) & & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{p+1} P(x) (-1)^{p-1} = P(x)$$

$\underline{\chi_A = P}$

4) $T = (X-1)P = X^{p+1} - 2X^p + 1$ après simplification.

en faisant l'étude de la fonction $x \mapsto T(x)$

on trouve le tableau de variations suivant :

en 27 suite.

$T'(x) = x^{p-1}\left((p+1)x - 2p\right)$

x	0	1	$\frac{2p}{p+1}$	2	$+\infty$
T'		$-$	0	$+$	
T	$1 \searrow$	$0 \searrow$	$\ominus$	$\nearrow 1$	$\nearrow$

$T(1) = 0$

$T(2) = 1$

avec le th des valeurs intermédiaires (ou de la bijection), on obtient une racine entre 1 et 2

Y a t'il une racine sur $\mathbb{R}^-$? pour $x < 0$

si p est impair $x^{p-1} > 0$ $T'(x) < 0$

T est $\searrow$ sur $\mathbb{R}_-$, pas de racine

si p est pair $x^{p-1} < 0$ $T'(x) > 0$ T est $\nearrow$ $T(0) = 1$

$T(x) \to -\infty$ $(x \to -\infty)$

il y a une racine aussi sur $\mathbb{R}_-$

l'énoncé est mal formulé : il faudrait dire qu'il admet une unique racine dans $]1,2[$ (mais qu'il peut en admettre d'autres). De toute façon, $T(1) = 0$ 1 est aussi une racine de T

Montrons que T n'a que des racines simples.

on cherche les racines communes entre $T(x)$ et $T'(x)$

$$\begin{cases} x^{p+1} - 2x^p + 1 = 0 & (1) \\ (p+1)x^p - 2px^{p-1} = 0 & (2) \end{cases}$$

$x = 0$ n'est pas solution de (1)

donc $x \neq 0$ $x = \frac{2p}{p+1}$ $T\left(\frac{2p}{p+1}\right) \neq 0$

donc pas de racine commune entre T et T'

T est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples.

$\chi_A(A) = 0 \Rightarrow P(A) = 0 \Rightarrow T(A) = 0$

donc A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Si on diagonalise A. $A = QDQ^{-1}$ D diagonale

$A^n = PD^nP^{-1}$ $U_n = PD^nP^{-1}U_0$.

algèbre $\boxed{\text{ex } 29}$

$A = (a_{ij})$ $|i-j| = 1 \Rightarrow a_{ij} = 1$ sinon $a_{ij} = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) A est symétrique réelle donc diagonalisable dans une bon.
il existe donc une bon de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ $(U_1, \dots, U_n)$
tq $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $AU_i = \lambda_i U_i$ avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les vp de A

2) $V_{ij} = U_i U_j^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$(V_{ij} | V_{kl}) = tr((V_{ij})^T V_{kl}) = tr(U_j \underbrace{U_i^T U_k}_{\text{c'est un nombre}} U_l^T)$

$(U_1 \dots U_n)$ est une bon donc $U_i^T U_k = \delta_{ik}$ (car $U_i^T U_k = (U_i | U_k)$)

$(V_{ij} | V_{kl}) = \delta_{ik} \, tr(U_j U_l^T) = \delta_{ik} \, tr(\underbrace{U_l^T U_j}_{\text{c'est un nombre}})$

$U_l^T U_j = \delta_{lj}$ donc $(V_{ij} | V_{kl}) = \delta_{ik} \delta_{lj} = \begin{cases} 1 \text{ si } i=k \text{ et } l=j \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

la famille $(V_{ij})_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ est orthonormée donc libre
et comporte le bon nombre de vecteurs donc c'est une bon de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

3) $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $T(M) = AM + MA + M$
il est clair que $T \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$
calculons $T(V_{ij}) = AU_iU_j^T + U_iU_j^TA + U_iU_j^T$

$= \lambda_i U_i U_j^T + U_i (AU_j)^T + U_i U_j^T = (\lambda_i + \lambda_j + 1) U_i U_j^T$

$T(V_{ij}) = (\lambda_i + \lambda_j + 1) V_{ij}$ et $V_{ij} \neq 0$ donc V_{ij} est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $\lambda_i + \lambda_j + 1$
il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de T donc T est diagonalisable
et $Sp(T) = \{ \lambda_i + \lambda_j + 1 \mid (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \}$