Mebas

Ex 2 $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad p_n = P(X=n)$

$\varphi :]0,1[\to \mathbb{R}$

$x \mapsto -x \ln x$

1) $\varphi(x) = -x\ln x \qquad \varphi'(x) = -1 - \ln x$

$\varphi'(x) \geq 0 \iff -1-\ln x \geq 0 \iff \ln x \leq -1 \iff x \leq e^{-1}$

x	0		e^{-1}		$+\infty$
φ'		$+$	0	$-$	
φ	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	$-\infty$

$\varphi(e^{-1}) = -e^{-1}\ln(e^{-1}) = e^{-1}$

2) $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ $\qquad p_n = p(1-p)^{n-1} \quad (n \geq 1)$

$$H(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} -p(1-p)^{n-1}\ln[p(1-p)^{n-1}] = -\sum_{n=0}^{+\infty} p(1-p)^n[\ln p + \ln(1-p)^n]$$

$$= -p\ln p \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^n}_{\substack{\text{converge} \\ \text{(série géom)}}} - p\ln(1-p)\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} n(1-p)^n}_{\text{conv (d'Alembert)}}$$

posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \qquad x \in]-1,1[$

$$H(X) = -p\ln p \frac{1}{1-(1-p)} - p\ln(1-p)\frac{1-p}{(1-(1-p))^2}$$

$$H(X) = -\ln p - \frac{p(1-p)\ln(1-p)}{p^2} = \underline{-\ln p - \frac{1-p}{p}\ln(1-p)}$$

3) Supposons que $E(X)$ existe

a) $p_n = P(X=n)$ $\qquad \sum p_n$ converge donc $p_n \to 0$ $(n \to +\infty)$

$\varphi(p_n) = -p_n \ln p_n \qquad p_n \in]0,1[$

$0 \leq \frac{\varphi(p_n)}{\sqrt{p_n}} = -\sqrt{p_n}\ln p_n$

$-\sqrt{p_n}\ln p_n \to 0$ $(n \to +\infty)$ par croissances comparées en 2 suite

et $-\sqrt{p_n}\ln p_n \geq 0$

donc à partir d'un certain rang $-\sqrt{p_n}\ln p_n \leq 1$

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq \varphi(p_n) \leq \sqrt{p_n}.$

b) si $p_n \leq \frac{1}{n^3}$ alors $\sqrt{p_n} \leq \frac{1}{n^{3/2}} \Rightarrow \varphi(p_n) \leq \frac{1}{n^{3/2}}$

et $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge

si $p_n \geq \frac{1}{n^3}$ $\quad \ln p_n \geq -3\ln n \rightarrow -\ln p_n \leq 3\ln n$

$\varphi(p_n) \leq 3 p_n \ln n \leq 3 n p_n$ (car $\ln n \leq n$)

$\sum n p_n$ converge car X admet une espérance

donc dans tous les cas

$$0 \leq \varphi(p_n) \leq \underbrace{\max\left(\frac{1}{n^{3/2}}, 3 n p_n\right)}_{\text{série convergente}}.$$

c) donc $\sum \varphi(p_n)$ converge donc X admet une entropie.

$\boxed{\text{ex 4}}$ probas

$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \quad Y$

$$P_{X=n}(Y=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k \leq n$$

1) loi de Y

2) $\mathrm{cov}(X,Y)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$?

3) loi de $X-Y$ mq Y et $X-Y$ sont $\perp\!\!\!\perp$

---

1)
$$P(Y=k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(X=n)\, P_{X=n}(Y=k)$$

$$= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$= e^{-\lambda} p^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\cancel{n!}} \frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!} q^{n-k}$$

$$= p^k e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+k}}{k!\,n!} q^n$$

$$= p^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{\lambda q} = p^k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{\lambda} e^{-\lambda p} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}$$

$$Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$$

2) $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$E(XY) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} nk\, P(X=n, Y=k) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} nk\, P(X=n) P_{X=n}(Y=k)$$

sous réserve d'existence. (montrer l'existence avant le calcul)

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} nk\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} nk\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{k!(n-k-1)!} p^{k+1} q^{n-k-1}$$

$$E(XY) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} p^{k+1} q^{n-k-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \binom{n-1}{k} p^{k+1} q^{n-k-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} e^{-\lambda} \lambda^n p \cdot \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k q^{n-1-k}}_{=(p+q)^{n-1}=1} \Big)$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} \lambda^n e^{-\lambda} p$$

$$= p e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{n+1}(n+1)}{n!} = p e^{-\lambda} \lambda \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \Big)$$

$$= p e^{-\lambda} \lambda \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{n!} + e^{\lambda} \Big) = p e^{-\lambda} \lambda (\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda})$$

$$E(XY) = \lambda p (\lambda + 1)$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = \lambda p(\lambda+1) - \lambda \lambda p = \lambda p \neq 0$$

$$X \not\perp\!\!\!\perp Y$$

3) $Y \leq X$, $Z = X - Y$ $\quad Z(\Omega) = \mathbb{N}$

$$P(Z=i) = P(X-Y=i) = P(X = Y+i)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k+i, Y = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+i}}{(k+i)!} \binom{k+i}{k} p^k q^i$$

$$= e^{-\lambda} q^i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+i}}{k!\, i!} p^k$$

$$= \frac{e^{-\lambda} q^i}{i!} \lambda^i e^{\lambda p} = \frac{\lambda^i q^i}{i!} e^{-\lambda} e^{\lambda p}$$

$$P(Y=k, Z=i) = P(Y=k, X-Y=i) = P(Y=k, X=k+i)$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+i}}{(k+i)!} \binom{k+i}{k} p^k q^i = P(Y=k)\, P(Z=i)$$

OK

probas $\boxed{\text{ex } 5}$

$X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Montrer que $\forall t \in [1, +\infty[$ $\quad P(X \geq a) \leq \dfrac{G_X(t)}{t^a}$
$\forall a \in \mathbb{R}$

En déduire que $P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$

Obtenir une autre majoration avec BT - comparer

$$P(X \geq a) = P(t^X \geq t^a) \leq \frac{E(t^X)}{t^a} = \frac{G_X(t)}{t^a}$$

$t^X = e^{X \ln t}$
$(t \geq 1$
donc $\ln t \geq 0)$

on pose $a = 2\lambda$

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{e^{\lambda(t-1)}}{t^{2\lambda}} \qquad \forall t \geq 1$$

Posons $f(t) = t^{-2\lambda} e^{\lambda(t-1)}$; $f'(t) = e^{\lambda(t-1)} \lambda t^{-2\lambda-1}(t-2)$

t	1		2		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

$f(2) = \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$

donc $P(X \geq 2\lambda) \leq f(2) = \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$

BT : $E(X) = \lambda$ $\quad$ "$X - \lambda \geq \lambda$" $\subset$ "$|X - \lambda| \geq \lambda$"

donc $P(X - \lambda \geq \lambda) \leq P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \dfrac{V(X)}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda}$

$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}$.

Pb : a-t-on $\frac{1}{\lambda} \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$?

$\frac{1}{\lambda} \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda \iff -\ln\lambda \leq \lambda \ln\left(\frac{e}{4}\right) \iff \lambda(1 - 2\ln 2) + \ln\lambda \geq 0$

on pose $f(\lambda) = \lambda(1 - 2\ln 2) + \ln\lambda$ et on étudie les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$

on trouve que $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ $f(\lambda) < 0$ (à faire)

donc BT n'est moins bonne que la méthode précédente.

$\boxed{\text{ex 6}}$

- X, Y 2 VA ⫫ $\sim \mathcal{G}(p)$

déterminer $P(X^Y = Y^X)$

puis $P(X^Y \leq Y^X)$

---

n, k deux entiers ≥ 1 quand a-t-on $n^k = k^n$?

- c'est vrai pour $n = k$.
- vrai pour $n = 1$ et $k = 1$ (si $n = 1$ alors $k = 1$ et récip)
- si $n > 1$ et $k > 1$

$n^k = k^n \iff k \ln n = n \ln k$

$$\frac{\ln n}{n} = \frac{\ln k}{k}$$

Soit $f(t) = \frac{\ln t}{t}$ $\quad f'(t) = \frac{\frac{1}{t}t - \ln t}{t^2} = \frac{1 - \ln t}{t^2}$

$f'(t) \geq 0 \iff 1 \geq \ln t \iff t \leq e$

t	1	2	e	4	$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

si $n \geq 3$ et $k \geq 3$

ce n'est pas possible si $n \neq k$

(f strict $\downarrow$)

si $n = 2$ alors $2^k = k^2 \iff k \ln 2 = 2 \ln k$

$\frac{\ln k}{k} = \frac{\ln 2}{2} = f(4)$

$k = 4$.

$k = 4$

et vice versa.

$X^Y = Y^X$ lorsque $X = Y$ ou $(X, Y) = (2, 4)$ ou $(X, Y) = (4, 2)$

$$P(X^Y = Y^X) = P(X = Y) + P(X = 2, Y = 4) + P(X = 4, Y = 2)$$

$$= \frac{p}{2-p} + (1-p)^4 p^2 + (1-p)^4 p^2$$

$P(X^Y < Y^X) = P(X^Y > Y^X)$ donc $P(X^Y < Y^X) = \frac{1 - P(X^Y = Y^X)}{2}$

et $P(X^Y \leq Y^X) = P(X^Y < Y^X) + P(X^Y = Y^X) = \frac{1 + P(X^Y = Y^X)}{2}$.

mobas $\boxed{\text{Exo } 7}$

$(X_k)_{k\geq 1}$ VA iid $\sim \mathcal{B}(\frac{2}{3})$

$A_k = $ " $X_{2k-1} X_{2k} = 0$ " $\quad k \geq 1 \quad B_p = \bigcap_{k=1}^{p} A_k$

$T = \min\{k \geq 2 \quad X_{k-1} = X_k = 1\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

1) mq $P(\overline{\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k}) = 1$ en déduire $P(T \in \mathbb{N}) = 1$

2) relation entre $P(T=n)$; $P(T=n-1)$; $P(T=n-2)$ $(n \geq 4)$

3) calculer $E(T)$ (conditionner par le résultat de X_1 et X_2).

---

1) $B_{p+1} \subset B_p \qquad \bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} B_p = \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$

$P(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k) = P(\bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} B_p) = \lim_{p\to\infty} P(B_p)$ (continuité $\downarrow$)

$P(B_p) = P(A_1 \cap \dots \cap A_p)$

$A_1 = $ " $X_1 X_2 = 0$ " $\qquad A_2 = $ " $X_3 X_4 = 0$ " et ...

$A_1 \dots A_p$ sont $\perp\!\!\!\perp$. (lemme des coalitions)

$P(B_p) = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_p)$

$P(A_1) = P(X_1 X_2 = 0) = P(X_1 = 0 \cup X_2 = 0)$

$P(\overline{A_1}) = P(X_1 \neq 0 \cap X_2 \neq 0) = P(X_1 \neq 0) P(X_2 \neq 0)$

$= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \quad \Rightarrow P(A_1) = \frac{5}{9}$

$P(B_p) = (\frac{5}{9})^p \qquad \lim_{p\to\infty} P(B_p) = 0$ donc $P(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k) = 0$

donc $\underline{P(\overline{\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k}) = 1}$

$P(T = +\infty) = P(\bigcap_{k\geq 2} \overline{C_k})$ avec $C_k = $ " $X_{k-1} = X_k = 1$ "

$\overline{C_k} = X_{k-1} = 0 \cup X_k = 0$

$\overline{C_k} = $ " $X_{k-1} X_k = 0$ "

$$\bigcap_{k\geq 2} \overline{C_k} \subset \bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k$$

$$0 \leq P\left(\bigcap_{k\geq 2} \overline{C_k}\right) \leq P\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\right) = 0$$

donc $P(T=+\infty)=0$ donc $\underline{P(T\in\mathbb{N})=1}$

2) SCE $X_1=0$; $(X_1=1)\cap(X_2=0)$; $(X_1=1)\cap(X_2=1)$

$$P(T=n) = P(X_1=0)\, P_{X_1=0}(T=n) + P(X_1=1\cap X_2=0)\, P_{X_1=1\cap X_2=0}(T=n)$$
$$+ P(X_1=1\cap X_2=1)\, P_{X_1=1\cap X_2=1}(T=n)$$

$$P(T=n) = \frac{1}{3} P(T=n-1) + \frac{2}{9} P(T=n-2) + 0 \qquad (n\geq 4)$$

3) $u_n = P(T=n)$ on a $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + \frac{2}{9}u_{n-2}$ $n\geq 3$

1ère méthode : on calculer u_n et $E(T) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\,u_n$

2ème méthode : u_n est CL de $(-\frac{1}{3})^n$ et $(\frac{2}{3})^n$ donc $\sum n u_n$ conv.

$$\sum_{n=3}^{+\infty} n\,u_n = \frac{1}{3}\sum_{n=3}^{+\infty} n\,u_{n-1} + \frac{2}{9}\sum_{n=3}^{+\infty} u_{n-2}\, n$$

$$E(T) = \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}(n+1)u_n + \frac{2}{9}\sum_{n=1}^{+\infty}(n+2)u_n + 2u_2$$

$$E(T) = \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty} n u_n + \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty} u_n + \frac{2}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} n u_n + \frac{2}{9}\sum_{n=1}^{+\infty} 2u_n + 2u_2$$

$$= \frac{1}{3}E(T) + \frac{1}{3} + \frac{2}{9}E(T) + \frac{4}{9} + 2u_2$$

$$\left(1-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\right)E(T) = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} + 2u_2$$

$u_2 = P(T=2) = P(X_1=X_2=1) = \frac{4}{9}$ $\quad\left(u_3 = P(T=3) = P(X_1=0\cap X_2=1\cap X_3=1) = \frac{4}{27}\right)$

$$\frac{4}{9}E(T) = \frac{15}{9} \qquad E(T) = \frac{15}{4}$$

mobes $\boxed{\text{en } 9}$

$X_1, \dots, X_n$ ⫫ de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$

$M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

1) $P(M_n \leq k) = P(X_1 \leq k \cap \dots \cap X_n \leq k) = P(X_1 \leq k) \cdots P(X_n \leq k)$

$= P(X_1 \leq k)^n$ par indépendance

2) $\alpha > 1$ $\quad E(X_1^\alpha) < +\infty$ $\quad m_\alpha = E(X_1^\alpha)$

Markov : $P(X_1 \geq k) = P(X_1^\alpha \geq k^\alpha) \leq \dfrac{E(X_1^\alpha)}{k^\alpha} = \dfrac{m_\alpha}{k^\alpha}$

$P(X_1 \leq k-1) = 1 - P(X_1 \geq k) \geq 1 - \dfrac{m_\alpha}{k^\alpha}$

Sous réserve d'existence

$$E(M_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(M_n \geq k)$$

$0 \leq P(M_n \geq k) = 1 - P(M_n \leq k-1) = 1 - (P(X_1 \leq k-1))^n$

$\leq 1 - \left(1 - \dfrac{m_\alpha}{k^\alpha}\right)^n$

posons $u_k = 1 - \left(1 - \dfrac{m_\alpha}{k^\alpha}\right)^n = 1 - \left[1 - n\dfrac{m_\alpha}{k^\alpha} + o\left(\dfrac{1}{k^\alpha}\right)\right]$

$k \to +\infty$

$= n\dfrac{m_\alpha}{k^\alpha} + o\left(\dfrac{1}{k^\alpha}\right) \sim n\dfrac{m_\alpha}{k^\alpha}$

$\sum \dfrac{1}{k^\alpha}$ converge car $\alpha > 1$

donc $\sum u_k$ converge donc $\sum_k P(M_n \geq k)$ converge

donc $E(M_n)$ est finie.

3) $X_1 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ $\quad E(X_1)$ est finie et $E(X_1^2)$ aussi

appliquons ce qui précède avec $\alpha = 2$ alors $E(M_n)$ est finie

et $E(M_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(M_n \geq k) = \sum_{k=1}^{+\infty} (1 - P(M_n \leq k-1))$

$= \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - [P(X_1 \leq k-1)]^n\right)$

$X_1 \sim \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$ $\quad P(X_1 = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k$ et $P(X_1 \leq k-1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} P(X_1 = i)$

suite ex 9

$$P(X_1 \le k-1) = \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}{1-\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

$$E(M_n) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left[1-\left(1-\left(\tfrac{1}{2}\right)^{k-1}\right)^n\right] = \sum_{k=0}^{+\infty}\left[1-\left(1-2^{-k}\right)^n\right]$$

on cherche un équivalent de $E(M_n)$ lorsque $n\to+\infty$

en cadrement par des intégrales

$t \mapsto 1-(1-2^{-t})^n$ est $\downarrow$ sur $[1,+\infty[$

$$(*) \qquad \int_k^{k+1}\left(1-(1-2^{-t})^n\right)dt \le 1-(1-2^{-k})^n \le \int_{k-1}^{k}\left(1-(1-2^{-t})^n\right)dt$$

on pose $I_n = \int_0^{+\infty}\left(1-(1-2^{-t})^n\right)dt$

convergence ?

si $t\to+\infty$ $\quad 2^{-t}\to 0 \quad 1-(1-2^{-t})^n = 1-(1-n2^{-t}+o(2^{-t}))$

$\sim n2^{-t} = ne^{-t\ln 2}$ intégrable

donc I_n existe.

en sommant la 1ère inégalité dans $(*)$: $\quad I_n \le E(M_n)$

en sommant la 2ème inégalité à partir de $k=1$:

$$E(M_n) - 1 \le I_n.$$

au final $\qquad I_n \le E(M_n) \le I_n + 1 \qquad (**)$

cherchons un équivalent de I_n lorsque $n\to+\infty$

$I_n = \int_0^{+\infty}\left(1-(1-2^{-t})^n\right)dt \qquad$ cht de var : $u = 2^{-t}$ (à justifier)

$= \int_0^1 \frac{1-(1-u)^n}{u}\,du \times \frac{1}{\ln 2} \qquad$ cht $x = 1-u$

$$I_n = \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x}\,dx \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} x^k\,dx = \frac{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1}}{\ln 2} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln 2} \sim \frac{\ln n}{\ln 2}$$

$I_n \sim \frac{\ln n}{\ln 2}$ Donc en divisant $(**)$ et $n\to+\infty$

on obtient $\qquad E(M_n) \sim \dfrac{\ln n}{\ln 2}$

$\boxed{\text{probas en 13}}$

$\mathcal{P}([\![1,n]\!]) \times \mathcal{P}([\![1,n]\!])$

évènement

C = avoir un couple (A, B)
tq $A \cap B = \emptyset$?

nb de couples (A, B) ?

$2^n \times 2^n = 4^n$.

nb de couples (A, B) disjoints ?

on fixe k le card de A.

$\binom{n}{k}$ choix des élt de A

2^{n-k} choix des elts de B
(disjoint de A)
(on enlève les élt de A
et on prend n'importe quelle
partie de $\mathcal{P}([\![1,n]\!]) \setminus A$)

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n.$$

réponse : $P(C) = \dfrac{3^n}{4^n} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.