analyse (en 1)

$P \in \mathbb{R}[X]$ $\quad a_n(P) = \int_0^1 P(t) t^n dt$

$\|P\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |P(t)|$, $N_\infty(P) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n(P)|$; $N_2(P) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2(P)}$

1) Supposons que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(P) = 0$

Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$

$\forall n$ $\quad \int_0^1 P(t) t^n dt = 0$

donc $\sum_{n=0}^{p} a_n \int_0^1 P(t) t^n dt = 0$ donc $\int_0^1 P^2(t) dt = 0$

$t \mapsto P^2(t)$ est continue et positive donc elle est nulle sur $[0,1]$

donc P admet une infinité de racines donc $\underline{P = 0}$

2) Pour N_∞ : il faut d'abord justifier que le sup existe.

$|a_n(P)| \leq \int_0^1 |P(t)| t^n dt \leq \|P\|_\infty \int_0^1 t^n dt \leq \frac{\|P\|_\infty}{n+1}$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad |a_n(P)| \leq \frac{\|P\|_\infty}{n+1} \leq \|P\|_\infty$ (*)

donc $(|a_n(P)|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée

donc $N_\infty(P)$ existe. (et $N_\infty(P) \leq \|P\|_\infty$ par ex)

pour N_∞, la séparation découle de 1)

l'homogénéité est évidente.

par l'inégalité triangulaire, on écrit

$\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad |a_n(P) + a_n(Q)| \leq |a_n(P)| + |a_n(Q)| \leq N_\infty(P) + N_\infty(Q)$

et par passage au sup : $N_\infty(P+Q) \leq N_\infty(P) + N_\infty(Q)$

donc N_∞ est une norme.

pour N_2 : il faut remarquer que c'est une norme euclidienne

on pose $(P|Q) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(P) a_n(Q)$

il faut d'abord montrer que la série converge.

d'après (*) $\quad |a_n(P)| \leq \frac{\|P\|_\infty}{n+1}$ et $|a_n(Q)| \leq \frac{\|Q\|_\infty}{n+1}$

en 1 suite

$|a_n(P)\, a_n(Q)| \leq \frac{c}{(n+1)^2}$ dont la série converge

donc $\sum a_n(P)\, a_n(Q)$ converge donc $(P|Q)$ existe.

puis montrer que $(P,Q) \mapsto (P|Q)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ (pas de difficultés)
et N_2 est la norme associée à ce produit scalaire.

3) $|a_n(P)| \leq \frac{\|P\|_\infty}{n+1}$ $\forall n$

donc $(a_n(P))^2 \leq \frac{\|P\|_\infty^2}{(n+1)^2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n(P))^2 \leq \|P\|_\infty^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \|P\|_\infty^2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \|P\|_\infty^2 \cdot \frac{\pi^2}{6}$$

donc $N_2(P) \leq \|P\|_\infty \cdot \frac{\pi}{\sqrt{6}}$

de plus $|a_n(P)|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} (a_n(P))^2$

$|a_n(P)| \leq N_2(P)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

et par passage au sup : $N_\infty(P) \leq N_2(P)$

4) $N_\infty(P) \leq N_2(P) \leq \|P\|_\infty \cdot \frac{\pi}{\sqrt{6}}$

Posons $P_k = X^k$ $P_k(t) = t^k$ $\|P_k\|_\infty = 1$; $a_n(P_k) = \frac{1}{k+n+1}$

$N_\infty(P_k) = \frac{1}{k+1}$ $N_2(P_k) = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(k+n+1)^2}}$

posons $\alpha_n : t \mapsto \frac{1}{(t+n+1)^2}$ $t \in [1, \infty[$.

$\forall t \geq 1$ $|\alpha_n(t)| \leq \frac{1}{(n+1)^2}$ $\sum \alpha_n$ CN sur $[1, \infty[$

donc d'après le th de la double limite

$$\lim_{t \to \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(t+n+1)^2} = 0$$

$\lim_{k \to \infty} N_2(P_k) = 0$.

en 1 donc N_2 et $\|\ \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

$\left(\frac{\|P_k\|_\infty}{N_2(P_k)} \to \infty \quad k \to \infty \right)$; N_∞ et $\|\ \|_\infty$ non plus.

pour N_2 et N_∞ :

on peut faire un encadrement par des intégrales pour montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{(n+k+1)^2} \to \infty \ (k \to \infty)$

donc $\frac{N_2(P_k)}{N_\infty(P_k)} \to \infty \ (k \to \infty)$ donc N_2 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

5) Soit $\varphi : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$
$P \mapsto P' = \varphi(P)$

prenons encore $P_k = X^k$

$P_k(t) = t^k$ $\qquad N_\infty(P_k) = \frac{1}{k+1}$

$P'_k(t) = k\,t^{k-1}$

$N_\infty(P'_k) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{k}{k+n+1} = 1$

$P_k \to 0 \ (k \to \infty)$ pour N_∞

$\varphi(P_k) = P'_k \not\to 0 \ (k \to \infty)$ pour N_∞.

$\varphi(P_k) \not\to \varphi(0) \ (k \to \infty)$ pour N_∞ donc φ n'est pas continue pour N_∞.

Ex 4

(a_n) suite >0 $\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

1) mq $S_n \sim \frac{1}{a_n} \Rightarrow a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$

2) réciproque.

indication pour 1) : considérer $S_{n+1}^2 - S_n^2$

---

1) $S_n \sim \frac{1}{a_n}$. (S_n) est $\nearrow$.

Si (S_n) était majorée, elle serait conv.

$\sum a_n$ conv donc $a_n \to 0$ contradic.

donc $S_n \to +\infty$ donc $a_n \to 0$

$S_{n+1}^2 - S_n^2 = (S_{n+1} - S_n)(S_{n+1} + S_n) = a_{n+1}(2S_{n+1} - a_{n+1})$

$= 2a_{n+1}S_{n+1} - a_{n+1}^2 \to 2 \quad (n \to \infty)$

Cesaro : $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_{k+1}^2 - S_k^2 \to 2 \quad (n \to \infty)$

$\frac{S_n^2}{n} - \frac{S_0^2}{n} \to 2$ donc $S_n^2 \sim 2n$

$S_n \sim \sqrt{2n} \sim \frac{1}{a_n}$

2) Suppa $a_n \sim \frac{1}{\sqrt{2n}}$ $\quad S_n \to +\infty$.

alors $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}}$ (à montrer). $(*)$

encadrement par des intégrales : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} \sim \sqrt{2n}$.

$(*)$ $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall k \geq n_0 \; \left| \frac{a_k}{\sqrt{2k}} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$\left| a_k - \frac{1}{\sqrt{2k}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2k}}$ $\quad \left| \sum_{k=n_0} a_k - \sum_{k=n_0}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=n_0}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}}$

$$\frac{\left| \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}} + \sum_{k=1}^{n_0 - 1} a_k - \frac{1}{\sqrt{2k}} \right|}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left| \frac{\sum a_k}{\sum \frac{1}{\sqrt{2k}}} - 1 \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\left| \frac{\sum_{k=1}^{n_0-1} a_k - \frac{1}{\sqrt{2k}}}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2k}}} \right|}_{< \frac{\varepsilon}{2} \text{ APCR}}$$

$\boxed{\text{Ex 5}}$

$h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ de classe C^2, $h'' > 0$ $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} h'(x) = +\infty$

1) Montrer $\exists !\, u_n \in \mathbb{R}_+^*,\ h(u_n) = n\pi$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$? $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} - u_n$?

3) convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin h(t)\, dt$

---

1) on voudrait appliquer le th de la bijection. Il faut montrer que h est strict $\nearrow$ et $\lim\limits_{+\infty} h = +\infty$

- on peut prolonger h par continuité en 0. h est alors convexe et continue sur $\mathbb{R}_+$

on a alors $\forall (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+$

$$x_0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{h(x_1) - h(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{h(x_2) - h(x_0)}{x_2 - x_0} \leq \frac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(h convexe).

en particulier pour $x_0 = 0$ $h(0) = 0$

$$\frac{h(x_1)}{x_1} \leq \frac{h(x_2)}{x_2} \Rightarrow h(x_1) \leq \frac{x_1}{x_2} h(x_2) < h(x_2)$$

car $\frac{x_1}{x_2} < 1$

donc h est strictement $\nearrow$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (et donc $h' \geq 0$)

- h est convexe donc la courbe est au dessus de ses tangentes.

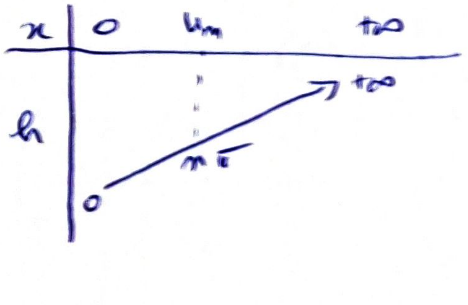
$\forall (x_0, x) \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad \dfrac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \geq h'(x_0)$

on prend x_0 tel que $h'(x_0) \neq 0$ (h' n'est pas identiquement nulle car $h'(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$)

$h'(x_0) > 0$

pour $x > x_0$ $\quad h(x) \geq (x - x_0) h'(x_0) + h(x_0) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$

donc $h(x) \to +\infty$ $(x \to +\infty)$



h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante donc h réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $h(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$

pour $n \geq 1$ $\quad n\pi \in \mathbb{R}_+^*$ donc $\exists !\, u_n \in \mathbb{R}_+^*,\ h(u_n) = n\pi$

2) $u_n = h^{-1}(n\pi)$

h^{-1} est strict $\nearrow$ et continue et $h^{-1}(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$

donc $h^{-1}(n\pi) \to +\infty$ $\quad (n \to \infty)$

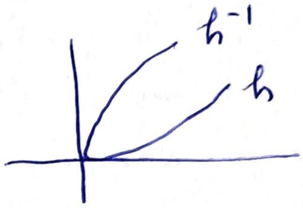
donc $u_n \to +\infty$ $(n \to \infty)$

on peut remarquer que (u_n) est croissante

en effet $\quad n\pi < (n+1)\pi \Rightarrow h^{-1}(n\pi) < h^{-1}((n+1)\pi)$

$\Rightarrow u_n < u_{n+1}$

on peut remarquer que h^{-1} est concave



en effet $(h^{-1})' = \dfrac{1}{h' \circ h^{-1}}$

h' et h^{-1} sont $\nearrow$ et > 0 donc $h' \circ h^{-1}$ est $\nearrow$ et > 0

donc $\dfrac{1}{h' \circ h^{-1}}$ est $\searrow$ donc $(h^{-1})'$ est $\searrow$.

(se montre aussi à partir de la définition d'une fonction convexe)

donc la courbe de h^{-1} est en dessous de ses tangentes.

$\forall (x, x_0) \in \mathbb{R}_+^* \qquad \dfrac{h^{-1}(x) - h^{-1}(x_0)}{x - x_0} \leq (h^{-1})'(x_0)$

en appliquant

en $n\pi$ et $(n+1)\pi$:

$$\frac{h^{-1}((n+1)\pi) - h^{-1}(n\pi)}{\pi} \leq \frac{1}{h' \circ h^{-1}(n\pi)}$$

$0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \dfrac{\pi}{h'(u_n)}$

$u_n \to +\infty$ donc $h'(u_n) \to \infty$ donc $\dfrac{\pi}{h'(u_n)} \to 0$

donc $\quad u_{n+1} - u_n \to 0 \quad (n \to \infty)$

ensuite

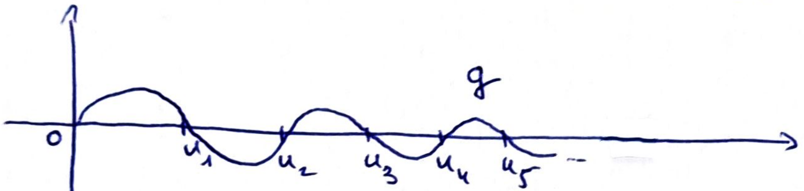
3) convergence de $\int_0^{+\infty} \sin(h(t))\,dt = I$

on pose $g(t) = \sin h(t)$

on peut remarquer que g est continue en 0
donc 0 n'est pas une borne impropre.

on peut remarquer que $g(u_n) = \sin n\pi = 0$

on peut remarquer que si $u_{2n} \leq t \leq u_{2n+1}$
alors $2n\pi \leq h(t) \leq (2n+1)\pi$, $\sin h(t) \geq 0$
si $u_{2n+1} \leq t \leq u_{2n+2}$ alors $\sin h(t) \leq 0$



pour montrer que I converge, il faudrait montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{u_n}^{u_{n+1}} \sin h(t)\,dt$ converge.

posons $w_n = \int_{u_n}^{u_{n+1}} \sin h(t)\,dt$. On va montrer que $\sum w_n$ vérifie le TSSA

$|w_n| \leq |u_{n+1} - u_n|$ car $|\sin h(t)| \leq 1$

donc $w_n \to 0$ $(n \to +\infty)$

ch^t de variable $x = h(t)$ $\quad t = h^{-1}(x)$ $\quad dt = \frac{1}{h' \circ h^{-1}(x)}\,dx$

$w_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{h' \circ h^{-1}(x)}\,dx$ ch^t de var $y = x - n\pi$: $w_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(y+n\pi)}{h' \circ h^{-1}(y+n\pi)}\,dy$

$w_n = (-1)^n \underbrace{\int_0^{\pi} (\sin y)(h^{-1})'(y+n\pi)\,dy}_{\geq 0}$ donc (w_n) est alternée.

$|w_n| = \int_0^{\pi} (\sin y)(h^{-1})'(y+n\pi)\,dy$ $\quad (h^{-1})'$ est ↓ car h^{-1} concave

d'après le TSSA $\sum w_n$ converge. $\quad$ donc $|w_{n+1}| \leq |w_n|$

Soit $X \in \mathbb{R}_+^*$, $X > u_1$, $\exists n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leq X < u_{n+1}$ $\quad$ si $X \to +\infty$, $n \to +\infty$.

$$\int_0^X \sin h(t)\,dt = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \sin h(t)\,dt}_{\text{converge } n\to+\infty} + \underbrace{\int_{u_n}^{X} \sin h(t)\,dt}_{\text{en valeur absolue}, \leq |u_{n+1}-u_n| \to 0}$$

donc $\int_0^X \sin h(t)\,dt$ converge lorsque $X \to +\infty$

Mines 2025

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,dt$$

ex 6

déterminer un DL de f à l'ordre n lorsque $x \to \infty$

l'intégrale converge : ok

on pose $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{(1+t)^n}\,dt$ $\qquad I_1(x) = f(x)$

IPP sur $f(x)$ on trouve

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} I_2(x)$$

$$I_2(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x} I_3(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^2} I_3(x)$$

$$I_n(x) = \frac{1}{x} - \frac{n}{x} I_{n+1}(x)$$

par récurrence $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} + \frac{(-1)^n n!}{x^n} I_{n+1}(x)$

puis montrer que $I_{n+1}(x) \to 0$ $(x \to +\infty)$ par conv dominée

(domination par $\frac{1}{(1+t)^{n+1}}$)

$$\underline{f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \quad (x \to +\infty)} = \underline{\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)}$$

analyse (ex 9)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0

telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = e^x f(y) + e^y f(x)$

Notons que $f(0+0) = e^0 f(0) + e^0 f(0) = 2f(0)$

donc $\underline{f(0) = 0}$

$f(x) = e^{x_0} f(x - x_0) + e^{x - x_0} f(x_0) \qquad x_0 \in \mathbb{R}$ fixé

si $x \to x_0 \quad x - x_0 \to 0 \quad f(x - x_0) \to f(0) = 0$ par continuité de f en 0

donc $f(x) \to f(x_0) \quad (x \to x_0)$

donc f est continue en x_0, vrai $\forall x_0 \in \mathbb{R}$

donc $\underline{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

Notons que $\underline{f(2x) = 2e^x f(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$f(2) = 2e f(1)$

$f(3) = f(2+1) = e^2 f(1) + e^1 f(2) = 3e^2 f(1)$

idée : déterminer $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, pour $n \in \mathbb{Z}$

puis $f(r)$ pour $r \in \mathbb{Q}$

puis $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

par récurrence, on a facilement $\forall n \in \mathbb{N} \quad \underline{f(n) = n e^{n-1} f(1)}$

Montrons que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \underline{f(nx) = n e^{(n-1)x} f(x)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$

$P(n)$: $f(nx) = n e^{(n-1)x} f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ fixé.

$P(1)$ est vraie (et $P(0)$ aussi)

Supposons $P(n)$ alors $f((n+1)x) = f(nx + x) = e^{nx} f(x) + e^x f(nx)$

$f((n+1)x) = e^{nx} f(x) + e^x n e^{(n-1)x} f(x) = (n+1) e^{nx} f(x)$

$P(n+1)$ vraie donc $\forall n \; P(n)$ vraie.

pour $x = \frac{1}{n}$ $\qquad f(1) = n e^{1 - \frac{1}{n}} f(\frac{1}{n})$

$\Rightarrow \underline{f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n} - 1} f(1)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

remarquons que

$0 = f(x-x) = e^{x} f(-x) + e^{-x} f(x)$

donc $f(-x) = -e^{-2x} f(x)$

donc si $x = \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{Z}^{-*}$ (entier <0)

$n = -p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$

$f(\frac{1}{n}) = f(-\frac{1}{p}) = -e^{-\frac{2}{p}} f(\frac{1}{p}) = -e^{-\frac{2}{p}} \frac{1}{p} e^{\frac{1}{p}-1} f(1)$

$f(\frac{1}{n}) = -\frac{1}{p} e^{-\frac{1}{p}-1} f(1) = \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}-1} f(1)$

on a donc $\forall n \in \mathbb{Z}^*$ $\underline{f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} e^{\frac{1}{n}-1} f(1)}$ $(**)$

pour $r \in \mathbb{Q}$, $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$

$f(\frac{p}{q}) = f(p \times \frac{1}{q}) = p e^{(p-1)\frac{1}{q}} f(\frac{1}{q})$ d'après $(*)$ avec $x = \frac{1}{q}$

$f(r) = f(\frac{p}{q}) = p e^{p/q - \frac{1}{q}} \frac{1}{q} e^{\frac{1}{q}-1} f(1)$ d'après $(**)$

$f(r) = \frac{p}{q} e^{p/q - 1} f(1) \Rightarrow \underline{f(r) = r e^{r-1} f(1)}$ $\forall r \in \mathbb{Q}$

pour $x \in \mathbb{R}$, x est la limite d'une suite de rationnels (car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$)

$\exists r_k \in \mathbb{Q}$, $r_k \to x$ $(k \to +\infty)$

$f(r_k) = r_k e^{r_k - 1} f(1)$ d'après ce qui précède

$f(r_k) \to f(x)$ $(k \to +\infty)$ par continuité de f.

par unicité de la limite : $\underline{f(x) = x e^{x-1} f(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

réciproquement, si $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x e^{x-1} f(1)$

on vérifie facilement que

$f(x+y) = e^{x} f(y) + e^{y} f(x)$.

analyse $\boxed{\text{Exo } 11}$

1) chgt de var $u = t^n$ (à justifier)

$$\int_0^1 n \ln(1+t^n)\,dt = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} u^{1/n}\,du$$

$f_n : u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u} u^{1/n}$ $\quad u \in]0,1]$

Th de conv dominée, domination par $u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ qui est intégrable sur $]0,1]$

2) $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,du$

DSE $u \in]0,1[$ $\quad \ln(1+u) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^n}{n}$

$$\frac{\ln(1+u)}{u} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^{n-1}}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^n}{n+1}$$

$I = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^n}{n+1}\,du$ $\qquad g_n : u \mapsto (-1)^n \frac{u^n}{n+1}$

g_n est cpm, intégrable sur $[0,1]$

$\sum g_n$ CS vers $u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$ qui est cpm

puis $J_n = \int_0^1 |g_n(u)|\,du = \int_0^1 \frac{u^n}{n+1}\,du = \frac{1}{(n+1)^2}$

$\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ conv donc $\sum \int_0^1 |g_n|$ converge

donc d'après le th d'intégration terme à terme

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{u^n}{n+1}\,du = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

$$I = -\sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^2} + \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^2}$$

$$I = -\sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \geq 1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -2 \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \geq 1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$I = -2 \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = -\frac{1}{2} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

3) f continue sur $[0,1]$ $\to$ f est bornée sur $[0,1]$

$\exists M>0 \quad \forall x \in [0,1] \quad |f(x)| \leq M$

$K_n = \int_0^1 n f(t) \ln(1+t^n)\, dt$

ch^t de var $u = t^n$

$K_n = \int_0^1 n f(u^{1/n}) \ln(1+u) \frac{1}{n} u^{1/n-1}\, du = \int_0^1 f(u^{1/n}) \frac{\ln(1+u)}{u} u^{1/n} du$

th de conv dominée

$\forall u \in]0,1] \quad \left| f(u^{1/n}) \frac{\ln(1+u)}{u} u^{1/n} \right| \leq M \frac{\ln(1+u)}{u}$ intégrable.

donc $n \to +\infty \quad u^{1/n} \to 1 \quad f(u^{1/n}) \to f(1)$ par continuité de f

donc $K_n \to f(1) \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} du \quad (n \to +\infty)$

$K_n \to f(1) \frac{\pi^2}{12} \quad (n \to +\infty)$

ex 19

$E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $f_0 \in E$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,dt$

1) f_0 est continue et par le TFA, f_1 est C^1

par récurrence immédiate f_n est C^n.

2) $P(n)$ $\forall x \in [-a,a]$ $|f_n(x)| \leq K \frac{|x|^n}{n!}$

$P(0)$: f_0 est continue sur $[-a,a]$ donc bornée

$\exists K > 0,$ $\forall x \in [-a,a]$ $|f_0(x)| \leq K$

donc $P(0)$ est vraie.

Supposons $P(n)$ alors $\forall x \in [-a,a]$ $|f_{n+1}(x)| \leq \left|\int_0^x |f_n(t)|\,dt\right|$

$|f_{n+1}(x)| \leq \left|\int_0^x K \frac{t^n}{n!}\,dt\right| \leq K \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ $P(n+1)$ est vraie.

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $P(n)$ est vraie

3) $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$

$\forall n \geq 1$ f_n est C^1

de plus $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$ $\forall x \in [-a,a]$ $|f_n'(x)| = |f_{n-1}(x)| \leq K \frac{|x|^{n-1}}{(n-1)!}$

donc $\|f_n'\|_\infty^{[-a,a]} \leq K \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}$ $\sum \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}$ converge

donc $\sum f_n'$ CN sur tout segment $[-a,a] \subset \mathbb{R}$

donc CU sur $[-a,a] \subset \mathbb{R}$

donc F est de classe C^1 sur $[-a,a]$ $\forall a \in \mathbb{R}$

donc F est C^1 sur $\mathbb{R}$

$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f_0(x) + F(x)$

donc $\underline{F' - F = f_0}$ $(*)$

on résoud l'équation différentielle $(*)$

Ex 19 suite

(H) $F' - F = 0 \Rightarrow F(x) = \lambda e^x$

solution particulière : méthode de variation de la constante. On trouve $\lambda'(x) e^x = f_0(x)$

$$\lambda'(x) = e^{-x} f_0(x)$$

on prend $\lambda(x) = \int_0^x e^{-t} f_0(t)\,dt$

$$F(x) = \lambda e^x + e^x \int_0^x e^{-t} f_0(t)\,dt$$

de plus $\forall n \geq 1 \quad f_n(0) = 0 \quad \left(\text{car } f_n(0) = \int_0^0 f_{n-1}(t)\,dt\right)$

donc $F(0) = 0$

donc $\lambda = 0$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = e^x \int_0^x e^{-t} f_0(t)\,dt$$

analyse $\boxed{\text{en 20}}$

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t}\,dt \qquad S(x) = \sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$$

1) On pose $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x} = (-1)^{n-1} e^{-x\ln n}$

f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

pour $x>0$ la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$

d'après le TSSA (à justifier)

on a aussi $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^x}$$

on prend $x \in [a, +\infty[$ avec $a>0$

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{(n+1)^a} \quad \forall x \in [a, +\infty[$$

$$\|R_n\|_\infty^{[a,+\infty[} \leq \frac{1}{(n+1)^a} \to 0 \ (n \to +\infty)$$

donc $\sum f_n$ CU sur $[a, +\infty[$

donc S est continue sur $[a, +\infty[$ $\forall a \in \mathbb{R}_+^*$

donc $\underline{S \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}$

$$S(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

par exemple on peut écrire $\forall x \in]-1, 1[\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$

Montrer que cette série CU sur $[0, 1]$ (avec le TSSA)

donc d'après le th de la double limite

$$\ln 2 = \lim_{x\to 1} \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to 1} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

donc $\underline{S(1) = \ln 2}$

2) $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t}\,dt$

en 20 suite

on pose $g(x,t) = \dfrac{t^x}{1+e^t}$ $\qquad t \in \mathbb{R}_+^*$

$t \to 0$ $\quad \dfrac{t^x}{1+e^t} \sim \frac{1}{2} t^x = \frac{1}{2} \dfrac{1}{t^{-x}}$ intégrable en 0 si $-x < 1$

$x > -1$

$t \to +\infty$ $\quad \dfrac{t^x}{1+e^t} \sim t^x e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ intégrable en $+\infty$.

donc $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si $x > -1$

donc <u>I est définie sur $]-1, +\infty[$</u>

continuité : appliquer le th de continuité sous l'intégrale

on domine sur un segment

$x \in [a,b] \subset]-1, +\infty[$

$|g(x,t)| = \dfrac{e^{x \ln t}}{1+e^t}$ $\qquad$ si $t \in]0,1]$ $\quad \ln t < 0$

$e^{x \ln t} \leq e^{a \ln t} = t^a$

si $t \geq 1$ $\quad \ln t \geq 0$

$e^{x \ln t} \leq e^{b \ln t} = t^b$.

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a,b]$ $\quad |g(x,t)| \leq \varphi(t)$

avec $\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{t^a}{1+e^t} & \text{si } t \in]0,1] \\ \dfrac{t^b}{1+e^t} & \text{si } t \in [1, +\infty[\end{cases}$

φ est intégrable (déjà démontré)

donc <u>I est continue</u>

3) on pose $I_{n,k} = \int_0^{+\infty} t^n e^{-kt} \, dt$ $\qquad$ (elle existe car $t^n e^{-kt} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$)

$n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}^*$

par IPP (à justifier)

$I_{n,k} = \frac{n}{k} I_{n-1,k} \qquad \forall n \geq 1$

en 20 suite

$$I_{n,k} = \frac{n}{k} I_{n-1,k}$$

$$I_{n-1,k} = \frac{n-1}{k} I_{n-2,k}$$

$\vdots$

$$I_{1,k} = \frac{1}{k} I_{0,k}$$

$$I_{n,k} = \frac{n!}{k^n} I_{0,k}$$

$$I_{0,k} = \int_0^{+\infty} e^{-kt} dt = \frac{1}{k}$$

donc $I_{n,k} = \dfrac{n!}{k^{n+1}}$

4) $I(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^n}{1+e^t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^n e^{-t}}{1+e^{-t}} dt$

$|e^{-t}| < 1$ pour $t > 0$

$$\frac{1}{1+e^{-t}} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-kt}$$

$$I(n) = \int_0^{+\infty} t^n \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(k+1)t} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^n e^{-(k+1)t} dt$$

on applique le th d'intégration terme à terme. n fixé

$f_k : t \mapsto (-1)^k t^n e^{-(k+1)t}$ cpm sur $\mathbb{R}_+^*$ et intégrable.

$\sum f_k$ CS sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $t \mapsto \dfrac{t^n}{1+e^t}$ qui est cpm sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\int_0^{+\infty} |f_k(t)| dt = \int_0^{+\infty} t^n e^{-(k+1)t} dt = I_{n,k+1} = \frac{n!}{(k+1)^{n+1}}$$

n fixé $\sum_{k \in \mathbb{N}} I_{n,k+1}$ converge (série de Riemann avec $n+1 > 1$)

donc on peut appliquer le th d'intégration terme à terme.

en somme

$$I(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \int_0^{+\infty} t^n e^{-(k+1)t}\, dt = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k I_{n,k+1}$$

$$I(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{n!}{(k+1)^{n+1}}$$

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^x}$$

$$S(n+1) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{n+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k+1)^{n+1}} = \frac{1}{n!} I(n)$$

on a donc

$$\underline{I(n) = n!\, S(n+1)}$$

5) $S(x) = 1 + \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ $\qquad f_n : x \mapsto \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$

on peut montrer que $\sum_{n\geq 2} f_n$ CN sur $[1, +\infty[$ (idem que 1) avec $a=1$)

et appliquer le th de la double limite.

$S(x) \to 1$ $(x \to +\infty)$ donc $S(n+1) \to 1$ $(n \to +\infty)$

donc $\underline{I(n) \sim n!}$ $(n \to +\infty)$.

6) équivalent en -1 de $I(x)$:

$$I(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+e^t}\, dt + \int_1^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t}\, dt$$

en utilisant le th de convergence dominée :

$$\lim_{x \to -1} \int_1^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t}\, dt = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+e^t)}\, dt = \text{limite finie}.$$

(domination $\frac{t^x}{1+e^t} \leq \frac{t^a}{1+e^t}$ pour $t \geq 1$ et $x \in]-1, a]$)

posons $J(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+e^t}\, dt$

en 20 suite

$$J(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 t^x dt = \int_0^1 \left(\frac{t^x}{1+e^t} - \frac{t^x}{2}\right) dt$$

$$= \int_0^1 t^x \frac{(1-e^t)}{1+e^t} dt$$ $x>-1$ (les intégrales convergent)

si $x \to -1$ $t^x \to \frac{1}{t}$

$$\frac{t^x(1-e^t)}{1+e^t} \to \frac{1-e^t}{(1+e^t)t}$$

on applique encore le th de conv dominée.

ici $t \in]0,1]$ $\ln t < 0$ si $x>-1$ $t^x \leq t^{-1}$

on domine $\left|\frac{t^x(1-e^t)}{1+e^t}\right| = \frac{t^x(e^t-1)}{e^t+1} \leq \underbrace{\frac{e^t-1}{t(e^t+1)}}_{\text{intégrable sur }]0,1]} \sim \frac{1}{2}$ $(t \to 0)$

donc $J(x) - \frac{1}{2}\int_0^1 t^x dt \to$ limite finie $(x \to -1)$

$\frac{1}{2}\int_0^1 t^x dt = \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} \to +\infty$ $(x \to -1^+)$

donc $J(x) \sim \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$ donc $I(x) \sim \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}$ $(x \to -1)$

analyse $\boxed{\text{ex } 22}$

$x \in \mathbb{R}$ $\quad t \in]-1,1[$ $\quad f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2nx)}{n} t^n$

on pose $f_n(t) = \frac{\cos(2nx)}{n} t^n$ $\quad$ (x fixé)

$\sum f_n$ est une SE de rayon R

$\left| \frac{\cos 2nx}{n} \right| \leq \frac{1}{n}$ $\Rightarrow R \geq$ rayon de $\sum \frac{1}{n} t^n$

donc $R \geq 1$

donc f est définie sur $]-1,1[$

(son domaine de def contient $]-1,1[$)

$\frac{t^n}{n} = \int_0^t u^{n-1} du$.

$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(2nx) \int_0^t u^{n-1} du = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^t \cos(2nx) u^{n-1} du$.

$t \in]-1,1[$ fixé

x fixé $\sum \cos(2nx) u^{n-1}$ est une SE

elle converge pour

$[0,t]$ ou $[t,0]$ $\quad u \in]-1,1[$

$\subset]-1,1[$

$\left(\cos(2nx) u^{n-1} = o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$

donc on peut intégrer terme à terme.

$f(t) = \int_0^t \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(2nx) u^{n-1} du$.

calculons $g(u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(2nx) u^{n-1} = \mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{2inx} u^{n-1} \right)$

$= \mathrm{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{2i(n+1)x} u^n \right) = \mathrm{Re}\left(e^{2ix} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{2ix} u)^n \right)$

$= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2ix}}{1 - e^{2ix} u} \right)$ $\quad$ pour $|u| < 1$

$= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2ix}(1 - e^{-2ix} u)}{(1 - e^{2ix} u)(1 - e^{-2ix} u)} \right)$

ex 22 suite

$$g(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{2ix} - u}{1 - e^{-2ix}u - e^{2ix}u + u^2}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\cos 2x + i\sin 2x - u}{1 - 2(\cos 2x)u + u^2}\right)$$

$$g(x) = \frac{\cos 2x - u}{u^2 - 2\cos(2x)u + 1} = -\frac{1}{2}\frac{(2u - 2\cos 2x)}{u^2 - 2(\cos 2x)u + 1}$$

$$f(t) = \int_0^t g(x)\,du = \left[-\frac{1}{2}\ln(u^2 - 2\cos(2x)u + 1)\right]_0^t$$

$$f(t) = -\frac{1}{2}\ln(t^2 - 2\cos(2x)t + 1)$$

autre méthode : montrer que f est C^1 d'après son expression en série, calculer $f'(t)$ sous la forme d'une somme de série et la calculer. Puis intégrer pour avoir f (et $f(0)=0$)

corrigé $\boxed{\text{eu } 28}$ analyse

$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt \qquad x \in]-1, +\infty[.$

relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ - Equivalent de f en $+\infty$

$x \in]-1, +\infty[\qquad f(x+2) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^{x+1} \sin t \, dt$

IPP

$u = (\sin t)^{x+1} \qquad u' = (x+1) \cos t (\sin t)^x$

$v' = \sin t \qquad v = -\cos t$

u, v sont C^1 sur $]0, \frac{\pi}{2}]$

si $t \to 0 \quad u(t)v(t) \to 0 \qquad$ (car $x+1>0$)

$f(x+2) = \left[(\sin t)^{x+1}(-\cos t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (x+1) \cos^2 t (\sin t)^x dt$

$f(x+2) = (x+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t)(\sin t)^x dt = (x+1)(f(x) - f(x+2))$

$\underline{(x+2) f(x+2) = (x+1) f(x)} \qquad \forall x \in]-1, +\infty[.$

on applique cette relation en $n \in \mathbb{N}$ et on pose $u_n = f(n)$

$u_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} u_n$

$u_{2n} = \frac{2n-1}{2n} u_{2n-2}$

$u_{2n-2} = \frac{2n-3}{2n-2} u_{2n-4}$

$\vdots$

$u_2 = \frac{1}{2} u_0$

$u_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3) \times \dots \times 1}{(2n)(2n-2) \times \dots \times 2} u_0 = \frac{(2n)!}{((2n)(2n-2) \dots \times 2)^2} u_0 = \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} u_0$

$u_0 = f(0) = \frac{\pi}{2}$. On va chercher un équivalent de u_{2n} $(n \to +\infty)$

$n! \sim \sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e}\right)^n \qquad u_{2n} \sim \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{4n\pi} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2^{2n} \, 2n\pi \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4n}}$

on montre facilement que $(u_n) \searrow$

$u_{2n-1} \leq u_{2n} \leq u_{2n+1} \leq u_{2n+2}$

$\underbrace{\frac{u_{2n}}{u_{2n+2}} = \frac{2n+2}{2n+1}}_{\to 1} \leq \frac{u_{2n+1}}{u_{2n+2}} \leq 1 \qquad$ donc $u_{2n+1} \sim u_{2n+2} \sim u_{2n}$

$$u_{2n+1} \sim u_{2n} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4n}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2(2n+1)}}$$

posons $v_n = \sqrt{2n}\, u_n$

$v_{2n} = \sqrt{4n}\, u_{2n} \to \sqrt{\pi}$

$v_{2n+1} = \sqrt{4n+2}\, u_{2n+1} \to \sqrt{\pi}$

donc $v_n \to \sqrt{\pi}$ donc $\underline{u_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}} \quad (n \to \infty)}$

on peut penser que $f(x) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}} \quad (x \to +\infty)$

f est ≥ 0 et $\downarrow$ $\qquad u_n = f(n) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad n = \lfloor x \rfloor \quad n \leq x \leq n+1$

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

$$\underbrace{\sqrt{2n}\, u_{n+1}}_{\to \sqrt{\pi}} \leq \sqrt{2x}\, f(x) \leq \sqrt{2n+2}\, u_n \sim \sqrt{2n}\, u_n \to \sqrt{\pi}$$

si $x \to +\infty$ alors $n \to +\infty$ $\quad \sqrt{2x}\, f(x) \to \sqrt{\pi}$

donc $\underline{f(x) \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2x}} \quad (x \to +\infty)}$

$\boxed{\text{ex } 31}$

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t^2}\,dt \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

1) mq I_n existe

2) écrire I_n sous forme de $\sum$

3) équivalent de I_n

---

1) $t \to 0$ $\quad f_n(t) = \dfrac{t^{n+1}\ln t}{1-t^2} \to 0$ $\quad$ prol par cont

$t \to 1$ $\quad f_n(t) = \dfrac{t^{n+1}\ln t}{(1-t)(1+t)} \sim \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln t}{1-t} \sim +\dfrac{1}{2}\dfrac{t-1}{1-t} \to -\dfrac{1}{2}$

prol par cont.

2) $t \in]0,1[$ $\quad \dfrac{t^{n+1}\ln t}{1-t^2} = t^{n+1}\ln t \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} t^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln t \, t^{2k+n+1}$

on fixe k

$g_k(t) = \ln t \, t^{2k+n+1}$

$$\int_0^1 |g_k(t)|\,dt = -\int_0^1 \ln t \, t^{2k+n+1}\,dt = J_k$$

IPP $\quad u = -\ln t \quad u' = -\dfrac{1}{t}$

$\quad v' = t^{2k+n+1} \quad v = \dfrac{t^{2k+n+2}}{2k+n+2}$

$$J_k = \int_0^1 \frac{t^{2k+n+1}}{2k+n+2}\,dt = \frac{1}{(2k+n+2)^2}$$

$\sum J_k$ est conv. donc $\sum \int_0^1 |g_k|$ conv

T d'int terme à terme :

$$I_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \ln t \, t^{2k+n+1}\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} -\frac{1}{(2k+n+2)^2}$$

3) $n \to +\infty$

Ex 31 suite

3) encadrement par intégrales

$$t \mapsto \frac{1}{(2t+n+2)^2} \quad \downarrow$$

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{(2t+n+2)^2} \leq \frac{1}{(2k+n+2)^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{(2t+n+2)^2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(2t+n+2)^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+n+2)^2} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(2t+n+2)^2}$$

$$(2t+n+2)^{-2}$$

$$\left[\frac{(2t+n+2)^{-1}}{-1} \times \frac{1}{2}\right]_1^{+\infty} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+n+2)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \leq \left[\frac{(2t+n+2)^{-1}}{-1} \times \frac{1}{2}\right]_0^{\infty}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{n+4} \leq -I_n - \frac{1}{(n+2)^2} \leq \frac{1}{2}\frac{1}{n+2}$$

$$\frac{n}{n+4} \leq -2nI_n - \frac{2n}{(n+2)^2} \leq \frac{n}{n+2} \to 1$$

$$-2nI_n \to 1$$

$$I_n \sim \frac{-1}{2n}$$

Exo 3.2.

on pose
$f_n(x) = (-1)^n e^{-a_n x}$

$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}$

◇ La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ est une série de fonctions continues et intégrables sur $[0, +\infty[$ puisque $a_n > 0$ pour tout n.

◇ La série numérique $\sum_{n\geq 0} f_n(0)$ diverge, et pour $x > 0$ la série $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ (d'après le critère spécial pour les séries alternées). Notons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ pour tout $x > 0$.

◇ Montrons que f est continue sur $]0, +\infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\sup_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x)| = 1 \qquad \text{et} \qquad \sup_{x\in[A,+\infty[} |f_n(x)| = e^{-a_n A}, \quad \forall A > 0.$$

Donc, on n'a pas en général convergence normale ni sur $]0, +\infty[$ ni sur les intervalles $[A, +\infty[$. Soit R_n le reste d'ordre n de la série de fonctions, alors pour $x > 0$ on a $|R_n(x)| \leq e^{-a_{n+1} x}$, d'où $|R_n(x)| \leq 1$ pour $x > 0$, ce qui ne donne pas la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$. Cependant, pour $x \geq A > 0$ on a $|R_n(x)| \leq e^{-a_{n+1} A}$ et

$$\sup_{x\in[A,+\infty[} |R_n(x)| \quad \leq \quad e^{-a_{n+1} A} \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad 0.$$

La série $\sum_{n\geq 0} f_n$ est une série de fonctions continues sur $]0, +\infty[$ qui converge uniformément sur tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$ avec $A > 0$. Donc, f est continue sur les intervalles de la forme $[A, +\infty[$ pour tout $A > 0$, i. e. sur $]0, +\infty[$.

◇ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)|\, dx \quad = \quad \frac{1}{a_n},$$

cependant, on ne sait pas si la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{a_n}$ converge. On ne peut donc pas appliquer le théorème d'intégration terme à terme.

2.

(i) La suite de fonctions $(S_n)_n$ converge simplement vers S sur $]0, +\infty[$. Les fonctions S_n et S sont continues pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le critère spécial pour les séries alternées, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$:

$$|S_n(x)| \leq e^{-a_0 x} \qquad \text{et} \qquad x \longmapsto e^{-a_0 x} \quad \text{est intégrable sur }]0, +\infty[.$$

en 32 suite.

Par le théorème de convergence dominée appliqué à la suite $(S_n)_n$ on a :

$$\int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\int_0^{+\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{a_k}.$$

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{R}$, la fonction $R_n := S - S_n$ est continue sur $]0,+\infty[$. Le critère spécial permet de majorer $|R_n(x)|$ par $|f_{n+1}(x)|$, par suite :

$$\left|\int_0^{+\infty} R_n(x)\,dx\right| \leq \int_0^{+\infty} |R_n(x)|\,dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-a_{n+1}x}\,dx = \frac{1}{a_{n+1}}.$$

Puisque

$$\int_0^{+\infty} S(x)\,dx - \int_0^{+\infty} S_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} R_n(x)\,dx$$

alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} S_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} S(x)\,dx$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-a_n x}\right)dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a_n}. \qquad (1)$$

Exercice 6.33

Intégrale de Gauss. Intégrales de Fresnel

INTÉGRALE DE GAUSS :

1. Montrer l'existence, sur $\mathbb{R}_+$, de :

$$f(t) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-t(1+x^2)}}{1+x^2}\,dx.$$

2. Étudier la monotonie, la convexité et la limite en $+\infty$ de la fonction f.

3. Montrer que f est continue sur $[0,+\infty[$ et est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

4. Donner une expression simple de f et en déduire la valeur de l'intégrale de Gauss

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

5. Étudier et calculer l'intégrale

$$I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-\left(x^2+\frac{a^2}{x^2}\right)}\,dx \qquad \text{où} \qquad a \geq 0.$$

INTÉGRALES DE FRESNEL :

Montrer que

$$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,dx = \int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

analyse (ex 33)

$f \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \overbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)}^{=(x \mid \nabla f(x))} \geq \|x\|$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^n$ tq $\|y\| = 1$

$\varphi(t) = f(ty) = f(ty_1, ty_2, \dots, ty_n)$ avec $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

par y fixé $t \mapsto ty$ est C^1 et f aussi donc φ est C^1
d'après la règle de la chaine

$$\varphi'(t) = y_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(ty) + y_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(ty) + \dots + y_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(ty)$$

$$\varphi'(t) = \sum_{k=1}^{n} y_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(ty) = (y \mid \nabla f(ty))$$

par $t > 0$ $\quad \varphi'(t) = \frac{1}{t}(ty \mid \nabla f(ty)) \geq \frac{1}{t} \|ty\| = \|y\| = 1$

$\forall t > 0 \quad \varphi'(t) \geq 1$ $\quad$ (d'après l'hypothèse)

valable aussi en $t = 0$ par continuité de φ'.

donc $\forall t \geq 0 \quad \int_0^t \varphi'(u)\,du \geq \int_0^t 1\,du = t$

$$\varphi(t) - \varphi(0) \geq t$$

$$\varphi(t) \geq t + \varphi(0)$$

$$f(ty) \geq t + f(0)$$

Soit $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque $\neq 0$ posons $t = \|x\| > 0$

$y = \frac{x}{\|x\|}$ de norme 1 $\qquad ty = x$

alors $f(x) \geq \|x\| + f(0) \to +\infty$ si $\|x\| \to +\infty$

analyse · ex 35

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sin(x^2+y^2)$$

1) $g(t)=f(tx_0,ty_0)$

g est C^1 comme composée de fonctions C^1

$$g'(t)=x_0\frac{\partial f}{\partial x}(tx_0,ty_0)+y_0\frac{\partial f}{\partial y}(tx_0,ty_0)=\frac{\sin t^2(x_0^2+y_0^2)}{t}$$

$$g'(1)=x_0\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)+y_0\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\sin(x_0^2+y_0^2)$$

$$g(1)=g(0)+\int_0^1 g'(t)dt \qquad (TFA)$$

2) $$f(x,y)=f(0,0)+\int_0^1\frac{\sin(t^2(x^2+y^2))}{t}dt$$

ch^t de var $u=t^2(x^2+y^2)$

3) $$du=2t(x^2+y^2)dt$$

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{2}\int_0\frac{\sin t^2(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)t^2}2t\,dt\,(x^2+y^2)$$

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{1}{2}\int_0^{x^2+y^2}\frac{\sin u}{u}du$$

$\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du$ converge. (IPP sur $\int_1^X\frac{\sin u}{u}du$.)

donc $X\mapsto\int_0^X\frac{\sin u}{u}du$ est bornée.

$\exists M>0,\ \forall X\in\mathbb{R}^+\ \left|\int_0^X\frac{\sin u}{u}du\right|\leq M$

donc $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ \left|\int_0^{x^2+y^2}\frac{\sin u}{u}du\right|\leq M$.

$|f(x,y)|\leq|f(0,0)|+\frac{1}{2}M \rightarrow f$ est bornée