PC* Devoir Maison N°1

Problème 1 : Intégrales de Wallis et formule de Stirling

Rappels sur les séries : *On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$. On dit que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. *La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge pour $\alpha>1$ (série de Riemann) *Si la suite (u_n) est réelle positive, que $u_n\sim v_n$ et que la série $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_n$ converge (th de comparaison)

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt$

1) Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n

En déduire que $\forall p\in\mathbb{N}\quad I_{2p}=\dfrac{(2p)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2}$

2) Equivalent :

a) Montrer que la suite $(n\,I_{n-1}\,I_n)_{n\geq 1}$ est constante .

b) Justifier que $\forall n\in\mathbb{N}\quad I_n>0$

c) Montrer que $\forall n\geq 1\quad I_{n+1}\leq I_n\leq I_{n-1}$, en déduire que pour $n\to+\infty\quad I_n\sim I_{n-1}$

d) Démontrer que pour $n\to+\infty$, $I_n\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

3) Application : pour $x\in\mathbb{R}^+$, on pose $f(x)=\int_0^{\pi/2}\cos^x t\,dt$. Montrer que f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et montrer que $f(x)\sim\sqrt{\dfrac{\pi}{2x}}$ lorsque $x\to+\infty$

Dans la suite de l'exercice, on pose $\forall n\geq 1\quad u_n=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\ln n-n-\ln(n!)$ et $v_n=u_{n+1}-u_n$

4) Déterminer un équivalent de v_n lorsque $n\to+\infty$. En déduire que la série $\sum v_n$ converge puis que la suite (u_n) converge. On note S sa limite.

5) Etablir l'existence d'une constante $C>0$ telle que $n!\sim C\,n^{n+\frac{1}{2}}\,e^{-n}$

6) En utilisant la question 2) d) , montrer la formule de Stirling : $n!\sim n^n\,e^{-n}\sqrt{2n\pi}$

Problème 2: Etude d'une fonction définie par une intégrale

On considère la fonction f définie par $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ $\quad f(t) = \dfrac{t-1}{\ln t}$ $\quad f(0) = 0$ et $f(1) = 1$

On pose $I = \int_0^1 f(t)dt$; $F(x) = \int_{x^2}^{x} \dfrac{f(t)}{t}$ et $G(x) = \int_x^1 f(t)dt$

1) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$

2) Montrer que F est définie sur $]0, +\infty[$ et que G est définie et dérivable sur $[0, +\infty[$

3) Etudier le signe de F sur $]0, +\infty[$ sans s'aider du tableau de variations .

4) Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée .Etudier le signe de F' et tracer le tableau de variations de F .(on ne cherchera pas les limites dans cette question).

5) On cherche la limite de F en 0^+

a) Montrer que pour $x \in]0,1[$, $\forall t \in [x^2, x]$ $\quad \dfrac{1}{\ln x} \leq \dfrac{1}{\ln t} \leq \dfrac{1}{2\ln x}$

b) En déduire un encadrement de $\int_{x^2}^{x} \dfrac{dt}{\ln t}$ pour $x \in]0,1[$ puis la limite de $\int_{x^2}^{x} \dfrac{dt}{\ln t}$ lorsque $x \to 0^+$

c) Calculer $\int_{x^2}^{x} \dfrac{1}{t\ln t} dt$

d) En déduire que F se prolonge par continuité en 0 . Déterminer la pente de la tangente en $x = 0$.

6) Calcul de I : Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[$ $\quad G(x) = F(x)$ .En déduire la limite de $G(x)$ lorsque $x \to 0^+$ et en déduire la valeur de I .

7) Ecrire le développement limité de f à l'ordre 1 en $x = 1$ .En déduire un développement limité de G en $x = 1$. Que peut on en déduire graphiquement pour la courbe de F ?

8) On cherche la limite de F en $+\infty$

a) Pour $x > 1$, écrire un encadrement du même type qu'à la question 5) a) .

b) En déduire un encadrement de F pour $x > 1$

c) En déduire l'étude de la branche infinie de F lorsque $x \to +\infty$

9) Tracer l'allure du graphe de F . On donne $\ln 2 \simeq 0.7$