PC* Devoir Maison N°2

I Polynômes et nombres de Bernoulli

Dans l'espace $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels, on considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel H défini par

$$H = \left\{ P \in \mathbb{R}[X];\ \int_0^1 P(x)\,dx = 0 \right\}$$

Dans tout le problème, on confond les polynômes et les fonctions polynômes.

On note D l'application linéaire de H dans $\mathbb{R}[X]$ qui à tout polynôme $P \in H$ associe son polynôme dérivé P'

$$\forall P \in H, \quad D(P) = P'$$

On identifiera polynôme constant et nombre réel.

I.A –

I.A.1) Montrer que $\mathbb{R}[X] = H \oplus \mathbb{R}_0[X]$

I.A.2) En déduire que D est surjectif.

I.A.3) Montrer que D est un isomorphisme.

On note $\varphi = D^{-1}$, l'isomorphisme réciproque. Ainsi, si $A \in \mathbb{R}[X]$, le polynôme B tel que $B = \varphi(A)$ est l'unique polynôme dans H tel que $B' = A$.

I.A.4) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On note Q la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_0^x P(t)\,dt + \int_0^1 (t-1)P(t)\,dt$$

a) Montrer que $Q \in H$.

b) Vérifier que $Q = \varphi(P)$.

I.B – On considère la suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $B_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} = \varphi(B_n)$$

Le polynôme B_n est le n-ième *polynôme de Bernoulli.* On a donc $B'_{n+1} = B_n$ et $\int_0^1 B_{n+1}(t)\,dt = 0$

I.B.1) Calculer B_1 et B_2.

I.B.2) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $B_n(0) = B_n(1)$.

I.C – Soit $n \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme C_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$$

I.C.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer C'_{n+1} à l'aide de C_n.

I.C.2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C_{n+1} = \varphi(C_n)$.

I.C.3) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.

I.C.4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que les nombres $B_{2n+1}(0)$ et $B_{2n+1}(1)$ sont nuls.

II – Application au calcul de $\sum_{k=1}^{n} k^p$

1. Soit p un entier naturel, on définit l'application Δ de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ vers $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ par :

$\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

a. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$.

b. Montrer que $Ker\Delta = \mathbb{R}_0[X]$

Indication : on pourra montrer que si $P \in Ker\Delta$ alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad P(n) = P(0)$

c. Montrer que $\operatorname{Im}\Delta = \mathbb{R}_p[X]$.

2 . En déduire que pour tout entier naturel p, il existe un et un seul polynôme Q de $\mathbb{R}_{p+1}[X]$ tel que : $\Delta(Q) = \dfrac{X^p}{p!}$ et $\int_0^1 Q(t)\,dt = 0$.

3 . Montrer que ce polynôme Q est en fait B_{p+1}. (On pourra procéder par récurrence sur p)

4 . En déduire que pour tout entier $p \geq 1$ et tout entier $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} k^p = p!\left(B_{p+1}(n+1) - B_{p+1}(0)\right)$.

5 . Calculer $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$.