

PC* Devoir Maison N°3**Exercice :**

Les questions sont indépendantes

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$1) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} (\ln x - \ln(1 - e^{-x})) dx$$

$$2) \int_0^{\pi/2} (\sin x)^\alpha (\cos x)^{1-\alpha} dx \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$3) \int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t} dt \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

Problème :

Soit E_0 l'espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1 sur \mathbb{R}^+ et vérifiant $f(0) = 0$.

E_1 l'ensemble des fonctions $f \in E_0$ telles que la fonction $t \mapsto \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2$ soit intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

E_2 l'ensemble des fonctions $f \in E_0$ telles que la fonction $t \mapsto (f'(t))^2$ soit intégrable sur \mathbb{R}^+

On note $N_1(f) = \sqrt{\int_0^{+\infty} \left(\frac{f(t)}{t}\right)^2 dt}$ pour $f \in E_1$; $N_2(f) = \sqrt{\int_0^{+\infty} (f'(t))^2 dt}$ pour $f \in E_2$

1) Exemples : les fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto \ln(1+t)$ appartiennent-elles à E_1 ? à E_2 ? Citer une fonction qui appartient à E_0 mais qui n'appartient ni à E_1 ni à E_2

2) a) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$

b) Soient f et g continues par morceaux sur I un intervalle de \mathbb{R} , à valeurs réelles. Montrer que si f^2 et g^2 sont intégrables sur I alors $f g$ est intégrable sur I . En déduire que l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I dont le carré est intégrable sur I est un espace vectoriel. En particulier, E_1 et E_2 sont des espaces vectoriels.

c) Montrer que l'application $(f, g) \mapsto \int_0^{+\infty} f'(t) g'(t) dt$ définit un produit scalaire sur E_2 . En déduire que N_2 est une norme sur E_2 . On admettra que N_1 est également une norme sur E_1

3) Soit $f \in E_0$, on pose $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad g(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t}}$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad h(t) = \frac{f'(t)}{t}$. On pose $\alpha = f'(0)$

a) Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t)$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t)$

b) Exprimer $f'(t) - \sqrt{t} g'(t)$ en fonction de $h(t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+^*$

c) Déterminer $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sqrt{t} g'(t)$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) g'(t)$

d) Etablir la relation (R) $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \int_0^x (f'(t))^2 dt = \frac{1}{2} (g(x))^2 + \int_0^x (\sqrt{t} g'(t))^2 dt + \frac{1}{4} \int_0^x (h(t))^2 dt$

(on justifiera l'existence de chacune des intégrales)

4) En déduire que $E_2 \subset E_1$. Montrer que l'inclusion est stricte

5) Montrer que $\forall f \in E_2 \quad N_1(f) \leq 2 N_2(f)$

6) On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f_n(t) = e^{-t} \sin(nt)$

a) Justifier que $f_n \in E_2$. On admettra que $N_2(f_n) = \frac{n}{2}$. Montrer que $N_1^2(f_n) \leq n \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(u)}{u^2} du$

c) N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

7) Soit $f \in E_2$. En utilisant la relation (R) , montrer que $g^2(x)$ admet une limite lorsque $x \rightarrow +\infty$ et montrer que cette limite est nulle. En déduire que $f(t) = o(\sqrt{t})$ lorsque $t \rightarrow +\infty$.