PC* Devoir Maison N°4

Problème :

Toutes les fonctions étudiées dans ce problème sont à valeurs réelles. On pourra identifier un polynôme et la fonction polynomiale associée.

On admet le théorème d'approximation de Weierstrass pour une fonction continue sur $[a,b]$: si f est une fonction continue sur $[a,b]$, il existe une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[a,b]$.

Le problème aborde un certain nombre de situations en lien avec ce théorème.

Partie 1. Exemple

Cette question illustre la dépendance d'une limite vis-à-vis de la norme choisie.

Soit $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Soient N_1 et N_2 deux applications définies sur $\mathbb{R}[X]$ ainsi :

pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sup\limits_{x\in[-2,-1]} |P(x)|$ et $N_2(P) = \sup\limits_{x\in[1,2]} |P(x)|$.

1) Vérifier que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. On admettra que N_2 en est également une.

On note f la fonction définie sur l'intervalle $[-2,2]$ ainsi :

pour tout $x \in [-2,-1]$, $f(x) = x^2$, pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x) = 1$ et pour tout $x \in [1,2]$, $f(x) = x^3$.

2) Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2,2]$ et justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes (P_n) qui converge uniformément vers la fonction f sur $[-2,2]$.

3) Démontrer que cette suite de polynômes (P_n) converge dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_1 vers X^2 et étudier sa convergence dans $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N_2.

Partie 2. Application : un théorème des moments

1). Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On suppose que pour tout entier naturel k,
$\int_a^b x^k f(x)\mathrm{d}x = 0$ $\left(\int_a^b x^k f(x)\,\mathrm{d}x \text{ est le moment d'ordre } k \text{ de } f \text{ sur } [a,b]\right)$.

2). Si P est une fonction polynôme, que vaut l'intégrale $\int_a^b P(x)f(x)\mathrm{d}x$?

3). Démontrer, en utilisant le théorème de Weierstrass, que nécessairement f est la fonction nulle.

4) Application

Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ muni du produit scalaire défini pour tout couple (f,g) d'éléments de E par $(f|g) = \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

On note F le sous-espace vectoriel de E formé des fonctions polynômes définies sur $[a,b]$ et $F^\perp$ l'orthogonal de F. Déterminer $F^\perp$. A-t-on $E = F \oplus F^\perp$?

5) Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-(1-i)x}\,\mathrm{d}x$. Après avoir démontré l'existence de ces intégrales, établir une relation entre I_{n+1} et I_n et démontrer que, pour tout n non nul, $I_n = \dfrac{n!}{(1-i)^{n+1}}$.

6) En déduire que, pour tout entier naturel k, $\int_0^{+\infty} x^{4k} e^{-x} x^3 \sin x\,\mathrm{d}x = 0$.

7) Proposer une fonction f continue sur $[0,+\infty[$, non nulle et vérifiant :

pour tout entier naturel k, $\int_0^{+\infty} u^k f(u)\mathrm{d}u = 0$. (changement de variable $u = x^4$)

8) Expliquer pourquoi la fonction f proposée à la question précédente ne peut être uniformément approchée sur $[0,+\infty[$ par une suite de polynômes.

Partie 3. Exemples

A- Si $[a,b] = [0,1]$, pour $n > 1$, on considère

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)x & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ -(n+1)x + \dfrac{2(n+1)}{n} & \text{si } \left[\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right] \\ 0 & \text{si } x \in \left[\dfrac{2}{n}, 1\right] \end{cases}$$

Par cet exemple, montrer qu'il est possible qu'une suite de fonctions continues converge simplement mais non uniformément vers une fonction continue.

B- Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes définies par $P_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}\quad P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}\left(X - P_n^2\right)$

1) Soit $x \in [0,1]$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\quad 0 \le P_n(x) \le \sqrt{x}$

2) En déduire qu'en posant $u_n = \sqrt{x} - P_n(x)$ et $f : t \mapsto \dfrac{2t}{2+t}$ on a $u_{n+1} \le f(u_n)$

3) On pose $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ n fois. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*\ \forall t \in [0,1]\quad f^n(t) = \dfrac{2t}{2+nt}$

4) En déduire que $\forall x \in [0,1]\quad \forall n \in \mathbb{N}\quad 0 \le \sqrt{x} - P_n(x) \le \dfrac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}} \le \dfrac{2}{2+n}$

5) En déduire que la suite (P_n) considérée comme une suite de fonctions polynômiales converge uniformément sur $[0,1]$ vers $x \mapsto \sqrt{x}$

2

Partie 4. Démonstration du théorème d'approximation de Weierstrass

(dans un cas particulier)

.A – *Quelques calculs préliminaires*

Dans cette sous-partie, x est un nombre réel et n est un entier naturel.

.A.1) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1$.

.A.2) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx$.

.A.3) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=n(n-1)x^2$.

.A.4) Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{k=0}^{n}\left(x-\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}.$$

.B – *Étude de $S(x)$*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,1]$. Le but de cette sous-partie est de majorer la somme

$$S(x)=\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Majoration de $S(x)$

a) Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ muni de son produit scalaire canonique.

b) À l'aide de la question A.4, en déduire que $S(x)\leqslant\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

.C – *Application à l'approximation uniforme*

Dans cette sous-partie, on note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}$ de la norme de la borne supérieure, notée $\|\ \|_\infty$:

$$\forall f\in\mathcal{C},\quad \|f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|.$$

Pour $f\in\mathcal{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on définit le n-ième polynôme de Bernstein de f, noté $B_n(f)$, en posant, pour tout $x\in[0,1]$

$$B_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Le but de cette sous-partie est d'étudier $\|B_n(f)-f\|_\infty$ lorsque f est un élément de $\mathcal{C}$ vérifiant une hypothèse additionnelle.

.C.1) Un exemple

Si $f(x)=x^2$ pour tout $x\in[0,1]$, déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, le polynôme $B_n(f)$ et en déduire la valeur de $\|B_n(f)-f\|_\infty$.

C.2) Soit $f\in\mathcal{C}$. Montrer, pour tout $x\in[0,1]$, la relation

$$B_n(f)(x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

.C.3) *a)* Montrer que si f est δ-lipschitzienne, alors $\|B_n(f)-f\|_\infty\leqslant\dfrac{\delta}{2\sqrt{n}}$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

b) En déduire que si f est de classe C^1, alors il existe un réel c tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\|B_n(f)-f\|_\infty\leqslant\dfrac{c}{\sqrt{n}}$.

En déduire que $(B_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f