

PC* Devoir Maison N°5

Réduction de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Dans tout le problème, K désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} et E est un K -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$.

On note $\mathcal{L}(E)$ le K -espace vectoriel des endomorphismes de E et $\mathcal{M}_n(K)$ le K -espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients dans K .

On note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice, dans la base \mathcal{B} de E , de l'endomorphisme u de $\mathcal{L}(E)$.

La matrice transposée de toute matrice M de $\mathcal{M}_n(K)$ est notée M^T .

On dit qu'un sous-ensemble \mathcal{A} de $\mathcal{L}(E)$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(E)$ si \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$, stable pour la composition, c'est-à-dire tel que $u \circ v$ appartient à \mathcal{A} quels que soient les éléments u et v de \mathcal{A} . (Remarquer qu'on ne demande pas que Id_E appartienne à \mathcal{A} .)

On dit qu'une sous-algèbre \mathcal{A} de $\mathcal{L}(E)$ est *commutative* si pour tous u et v dans \mathcal{A} , $u \circ v = v \circ u$.

Une sous-algèbre \mathcal{A} de $\mathcal{L}(E)$ est dite *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure) pour tout u de \mathcal{A} .

On dit qu'une partie \mathcal{A} de $\mathcal{M}_n(K)$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{M}_n(K)$ si \mathcal{A} est un sous-espace vectoriel stable pour le produit matriciel. Elle est dite *commutative* si, pour toutes matrices A et B de \mathcal{A} , $AB = BA$. Une sous-algèbre \mathcal{A} de $\mathcal{M}_n(K)$ est *diagonalisable* (respectivement *trigonalisable*) s'il existe $P \in \text{GL}_n(K)$ telle que pour toute matrice M de \mathcal{A} , $P^{-1}MP$ soit diagonale (respectivement triangulaire supérieure).

Si \mathcal{B} est une base de E , l'application $\text{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{M}_n(K)$ est une bijection qui envoie une sous-algèbre (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable) de $\mathcal{L}(E)$ sur une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(K)$ (respectivement commutative, diagonalisable, trigonalisable).

Un sous-espace vectoriel F de E est *strict* si F est différent de E .

On désigne par $S_n(K)$ (respectivement $A_n(K)$) l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(K)$ (respectivement antisymétriques). On désigne par $T_n(K)$ (respectivement $T_n^+(K)$) le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(K)$ constitué des matrices triangulaires supérieures. (respectivement des matrices triangulaires supérieures à coefficients diagonaux nuls).

I Exemples de sous-algèbres

I.A - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(K)$

- Q 1. Les sous-ensembles $T_n(K)$ et $T_n^+(K)$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(K)$?
- Q 2. Les sous-ensembles $S_2(K)$ et $A_2(K)$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(K)$?
- Q 3. On suppose $n \geq 3$. Les sous-ensembles $S_n(K)$ et $A_n(K)$ sont-ils des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(K)$?

I.B - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et \mathcal{A}_F l'ensemble des endomorphismes de E qui stabilisent F , c'est-à-dire $\mathcal{A}_F = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u(F) \subset F\}$.

Q 4. Montrer que \mathcal{A}_F est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Q 5. Montrer que $\dim \mathcal{A}_F = n^2 - pn + p^2$.

On pourra considérer une base de E dans laquelle la matrice de tout élément de \mathcal{A}_F est triangulaire par blocs.

Q 6. Déterminer $\max_{1 \leq p \leq n-1} (n^2 - pn + p^2)$.

I.C - Exemples de sous-algèbres de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ diagonalisables et non diagonalisables

Soit $\Gamma(\mathbb{K})$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ constitué des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{K}^2$.

Q 7. Montrer que $\Gamma(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

Q 8. Montrer que $\Gamma(\mathbb{R})$ n'est pas une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Q 9. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable sur \mathbb{C} . En déduire que $\Gamma(\mathbb{C})$ est une sous-algèbre diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

II Une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on suppose $n \geq 2$.

Pour tout $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le coefficient d'indice (i, j) de $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ est a_{i-j} si $i \geq j$ et a_{i-j+n} si $i < j$.

Soit \mathcal{A} l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la forme $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ où $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$.

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice canoniquement associée à l'endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ défini par $\varphi : e_j \mapsto e_{j+1}$ si $j \in \{1, \dots, n-1\}$ et $\varphi(e_n) = e_1$, où (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n .

II.A - Calcul des puissances de J

Q 10. Préciser les matrices J et J^2 . (On pourra distinguer les cas $n = 2$ et $n > 2$.)

Q 11. Préciser les matrices J^n et J^k pour $2 \leq k \leq n-1$.

Q 12. Quel est le lien entre la matrice $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ et les J^k , où $0 \leq k \leq n-1$?

II.B - Une base de \mathcal{A}

Q 13. Montrer que $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est une base de \mathcal{A} .

Q 14. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M commute avec J si et seulement si M commute avec tout élément de \mathcal{A} .

Q 15. Montrer que \mathcal{A} est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

II.C - Diagonalisation de J

Q 16. Déterminer le polynôme caractéristique de J .

Q 17. Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q 18. La matrice J est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Q 19. Déterminer les valeurs propres complexes de J et les espaces propres associés.

II.D - Diagonalisation de \mathcal{A}

Q 20. Le sous-ensemble \mathcal{A} est-il une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Q 21. Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que, pour toute matrice $A \in \mathcal{A}$, la matrice $P^{-1}AP$ est diagonale.

Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$. On note $Q \in \mathbb{R}[X]$ le polynôme $\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

Q 22. Quelles sont les valeurs propres complexes de la matrice $J(a_0, \dots, a_{n-1})$?