

PC* Devoir Maison N°6**Etude de la transformation de Laplace**

Dans tout le problème, f désigne une application continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}

On note E l'ensemble des réels x tels que $t \mapsto f(t)e^{-tx}$ soit intégrable sur \mathbb{R}^+

Pour $x \in E$, on pose $Lf(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-tx} dt$

I Etude d'un exemple

Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f(t) = \frac{t}{e^t - 1} - 1 + \frac{t}{2}$

- 1) Montrer que f se prolonge par continuité en 0. On note encore f le prolongement obtenu
- 2) Déterminer E
- 3) Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad \frac{1}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t}$.

Puis montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad Lf(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$

- 4) Est-ce que $Lf(x) - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x}$ admet une limite finie en 0^+ ?

II Généralités

f désigne à nouveau une application quelconque continue de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R} . On suppose que E n'est pas vide

- 1) Montrer que E est un intervalle non majoré de \mathbb{R} . On appelle α sa borne inférieure (par convention, $\alpha = -\infty$ si $E = \mathbb{R}$). On a donc $E =]\alpha, +\infty[$ ou $E = [\alpha, +\infty[$
- 2) Montrer que Tf est de classe C^∞ sur $] \alpha, +\infty[$ et exprimer ses dérivées successives à l'aide d'une intégrale.
- 3) Dans le cas particulier où $f(t) = e^{-at} t^n$ pour $t \in \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$, expliciter E et calculer $Tf(x)$ pour tout $x \in E$
- 4) On suppose que f admet une limite finie l en $+\infty$. Montrer que E contient \mathbb{R}_+^* et que $xLf(x)$ tend vers l en 0^+

III Injectivité

On admet le théorème de Weierstrass : si f est continue sur $[a, b]$ alors il existe une suite de fonctions polynômes qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$

- 1) Soit g une application continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_0^1 t^n g(t) dt = 0$. Que peut-on dire de $\int_0^1 P(t)g(t) dt$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$? En déduire que g est l'application nulle.

2) Soit f telle que E soit non vide. Soit $x \in E$ et $a > 0$. On pose $h(t) = \int_0^t e^{-xu} f(u) du$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

a) Montrer que $Lf(x+a) = a \int_0^{+\infty} e^{-at} h(t) dt$

b) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N} \quad Lf(x+na) = 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$\int_0^1 u^n h\left(-\frac{\ln u}{a}\right) du$ converge et qu'elle est nulle. Qu'en déduit on pour la fonction h ?

c) Montrer que l'application qui à f associe Lf est injective.

IV Une utilisation de la transformation L

Dans cette partie, \mathcal{P} désigne l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels et on utilise la transformation L appliquée à des éléments de \mathcal{P} pour l'étude d'un opérateur U .

1 - Soient P et Q deux éléments de \mathcal{P} .

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$, converge.

2 - On note pour tout couple $(P, Q) \in \mathcal{P}^2$,

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$$

Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur \mathcal{P} .

3 - On note D l'endomorphisme de dérivation et U l'endomorphisme de \mathcal{P} défini par

$$U(P)(t) = e^t D(te^{-t} P'(t))$$

Vérifier que U est un endomorphisme de \mathcal{P} .

4 - Montrer que pour tous P et Q de \mathcal{P} , on a

$$\langle U(P), Q \rangle = \langle P, U(Q) \rangle$$

5 - Montrer que 0 est valeur propre de U . On admet que U ne possède que des valeurs propres réelles. Montrer que deux vecteurs propres de U associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

6 - Soient λ une valeur propre de U et P un vecteur propre associé.

Montrer que P est solution d'une équation différentielle linéaire simple que l'on précisera.

Quel lien y a-t-il entre λ et le degré de P ?

7 - **Description des éléments propres de U**

On considère sur $[0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E_n): tP'' + (1-t)P' + nP = 0$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et d'inconnue $P \in \mathcal{P}$.

a) En appliquant la transformation L à (E_n) , montrer que si P est solution de (E_n) sur $[0, +\infty[$, alors son image Q par L est solution d'une équation différentielle (E'_n) d'ordre 1 sur $]1, +\infty[$.

b) Résoudre l'équation (E'_n) sur $]1, +\infty[$ et en déduire les valeurs et vecteurs propres de l'endomorphisme U .

c) Quel est le lien entre ce qui précède et les fonctions polynomiales définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $P_n(t) = e^t D^n(e^{-t} t^n)$?