Mesures et incertitudes

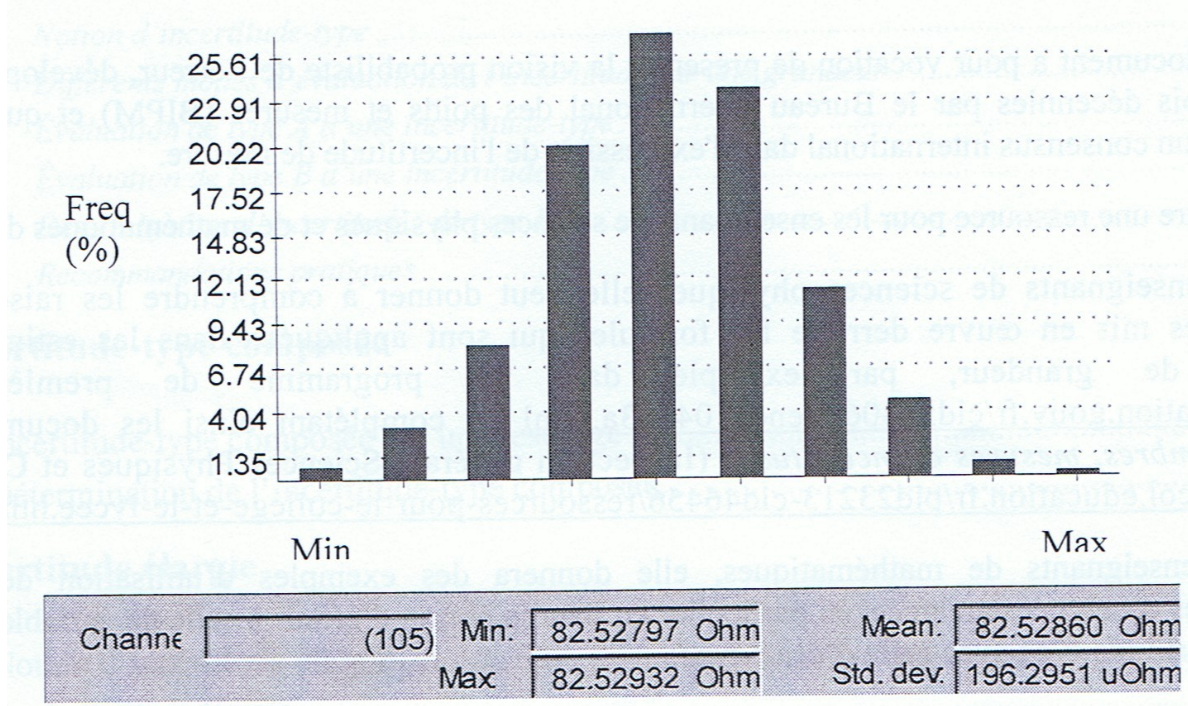
« Dire qu'on a 1kg de pommes est peut-être précis mais ce n'est pas exact.

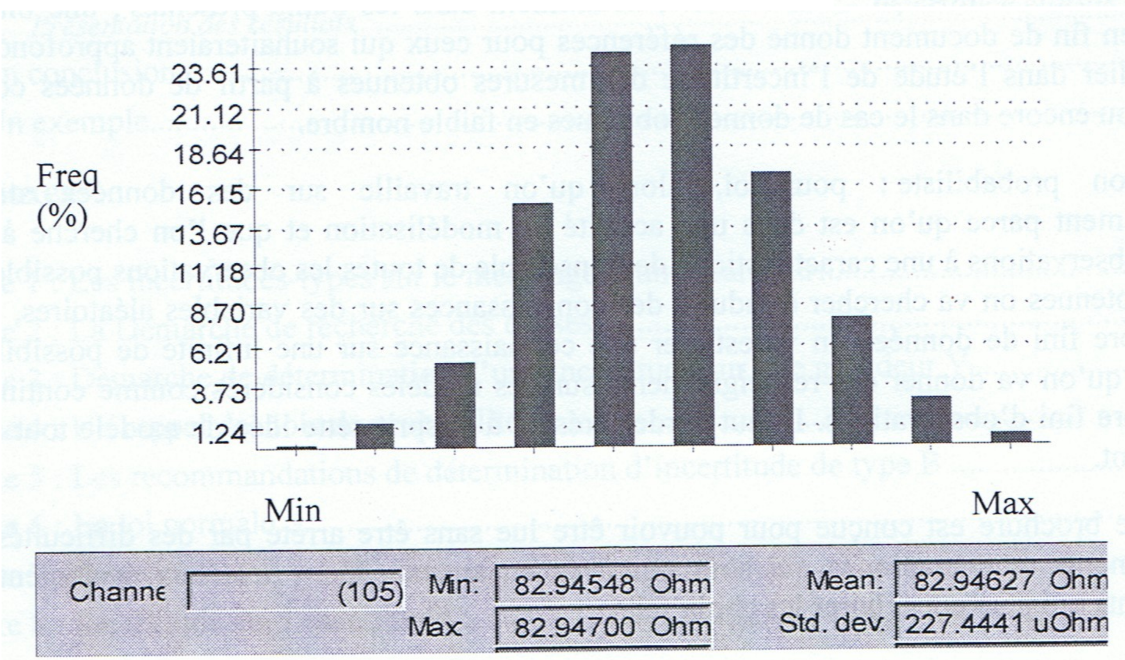
Dire qu'on a 1kg de pommes plus ou moins 10g , ce n'est peut-être pas précis mais c'est exact »

Pierre Giacomo, ancien directeur du Bureau International des Poids et Mesures.

Un exemple

2000 mesures m
de la résistance R





Observations ?

Toute grandeur physique est objet de **mesure**

- Variabilité de la mesure :

  la répétition de l’ensemble de la mesure conduit généralement à une valeur mesurée sensiblement différente de la première

résultat de la mesure toujours accompagné d'informations sur **l'incertitude de mesure.**

Vocabulaire de la mesure

- Mesurande (grandeur mesurée)
- Mesurage (action de mesurer)
- Grandeur d’influence
- Mesure (résultat donné par le mesurage)

Causes de variabilité d'une mesure ?

Causes de variabilité d’une mesure

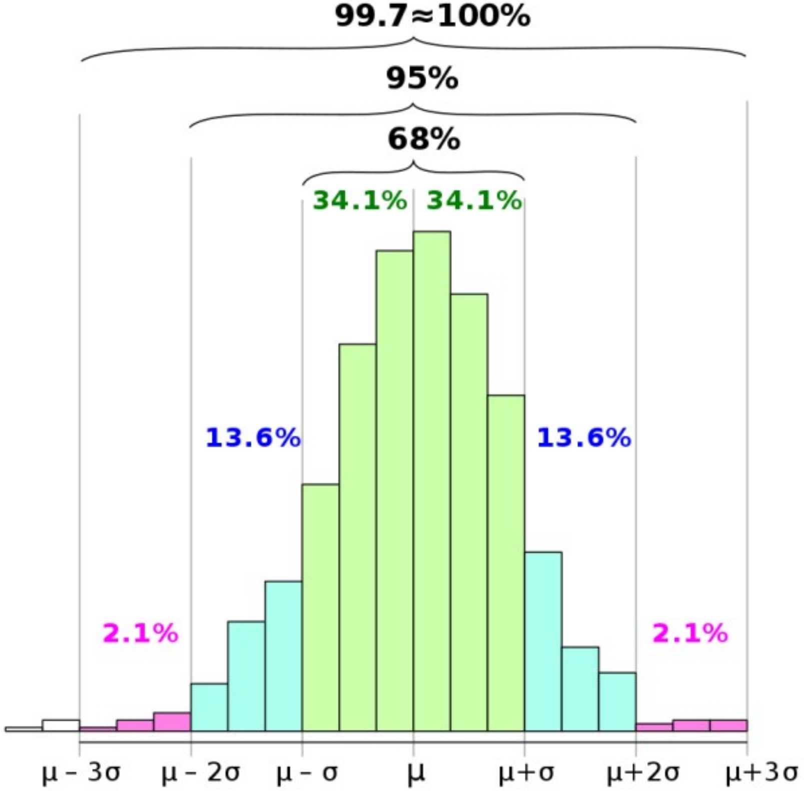
- Choix de la méthode de mesure, dextérité de l’expérimentateur
  - Règle graduée ou pied à coulisse ?
- Variations de l’environnement
  - Température influe sur la vitesse du son
- Incertitudes liées aux instruments de mesure
  - Mesure d’une même tension avec deux voltmètres différents
- Incertitudes liées au processus physique lui-même
  - Expériences de mécanique quantique
  - Bruits thermique, électrique...

Incertitude-type

Variabilité d’une mesure m d’une grandeur

- quantifiée par l’**incertitude-type**
- notée **u(m)**
- correspond à l’**écart-type de la distribution** des données issues d’une répétition de la mesure.

$$M = m \pm u(m),\ unité$$



Cas d’une répartition normale

Analyse statistique : incertitude-type de type A

N mesures indépendantes m_i

Meilleure estimation du résultat de mesure :
moyenne arithmétique

Écart-type expérimental

Incertitude-type ou écart-type sur la valeur moyenne

Analyse statistique : incertitude-type de type A

N mesures indépendantes m_i

Meilleure estimation du résultat de mesure :
moyenne arithmétique

$$\overline{m}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N} m_i$$

Incertitude type sur une mesure unique

$$s_{\exp}(m)=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{i=N}\left(m_i-\overline{m}\right)^2}$$

Incertitude type sur la valeur moyenne

$$u(\overline{m})=\frac{s_{\exp}(m)}{\sqrt{N}}$$

Analyse probabiliste : incertitude-type de type B

Informations disponibles :

- Spécifications constructeurs (pas toujours très claires)
- Certificats d'étalonnage
- Mesures antérieures
- Connaissance du comportement des matériaux ...

Si résultats du processus de mesure compris entre m-d et m+d, l'incertitude-type est donnée par

$$u(m)=\frac{d}{\sqrt{3}}$$

Hypothèse : Distribution uniforme sur l'intervalle
Expertise expérimentale pour déterminer d

Incertitude de mesure

Résultat d'une mesure

$$\boxed{M = m \pm u(m),\ unité}$$

Nombre de chiffres significatifs ?

Chiffres significatifs

	Nombre de chiffres significatifs
$R = 10\ g.L^{-1}$	
$R = 10{,}0\ g.L^{-1}$	
$R=0{,}121\ g.L^{-1}$	
$R = 0{,}1210\ g.L^{-1}$	

Mesure incertaine <=> Nombre limité de chiffres significatifs

- 2 chiffres significatifs recommandé pour une incertitude
- Écriture en cohérence du résultat de la mesure

Valider un modèle ?
Comparer deux valeurs ?

Écart normalisé ou z-score

$$\boxed{E_N = \frac{\text{valeur mesurée} - \text{valeur ref}}{\text{incertitude type (mesure)}}}$$

$$\boxed{E_N = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}}}$$

Par convention, deux résultats sont considérés compatibles si :

$$\boxed{E_N \leq 2}$$

Valider un modèle ?
Comparer deux valeurs ?

Écart normalisé ou z-score

$$E_N = \frac{\text{valeur mesurée} - \text{valeur ref}}{\text{incertitude type (mesure)}}$$

$$E_N = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}}$$

Exemple

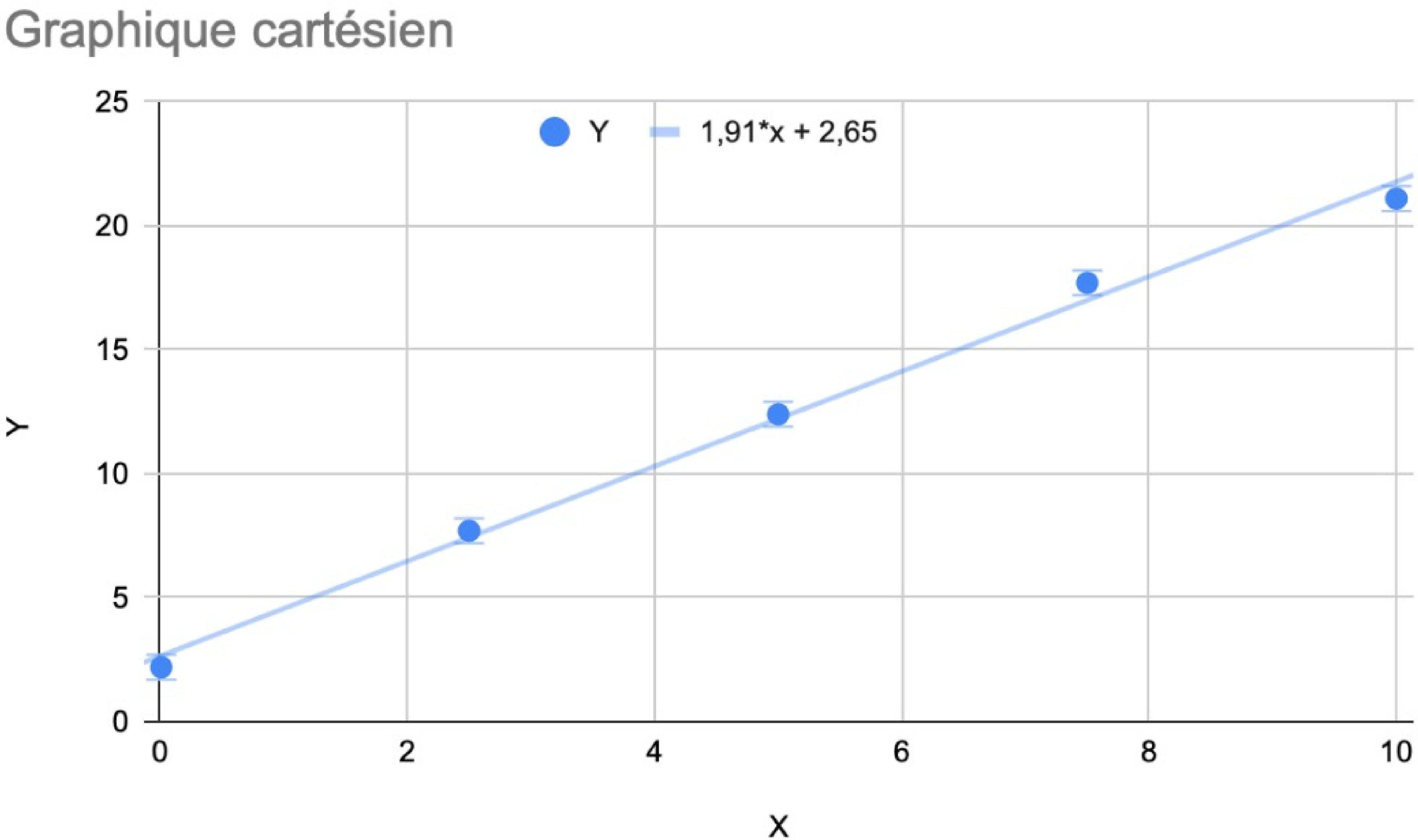
Modèle isotherme :

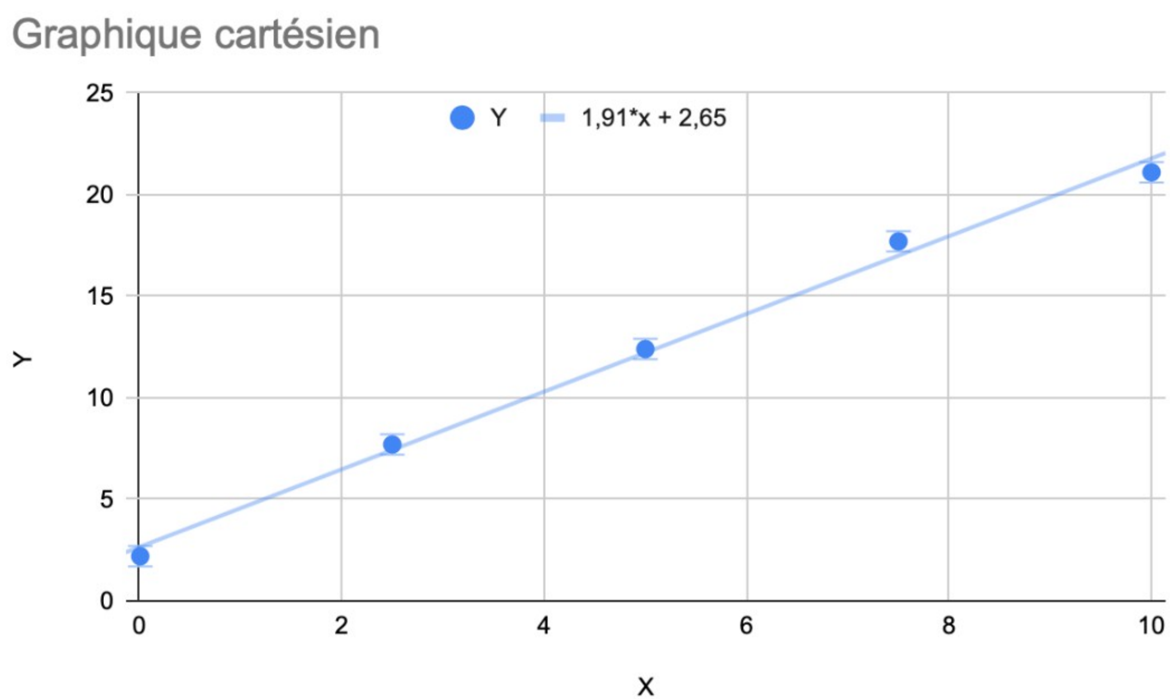
- la célérité du son dans l'air à 20°C est égale à c_{ref}=276 m/s
- On mesure c = 345 m/s

$$\frac{|\text{valeur mesurée} - \text{valeur ref}|}{\text{incertitude type (mesure)}} = 12{,}3$$

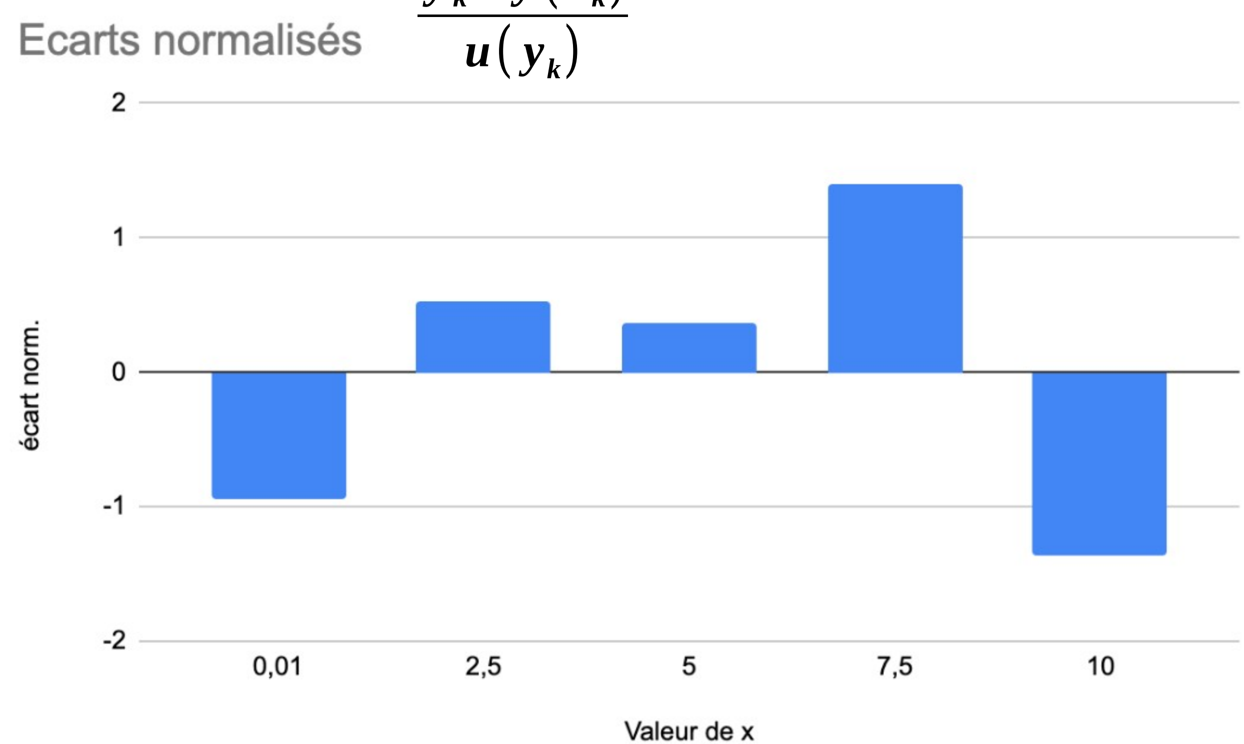
→ modèle isotherme peu vraisemblable

Validation d’un modèle ...ici linéaire





$$\frac{y_k - y(x_k)}{u(y_k)}$$



Vraisemblance d’un modèle

« Il n’y a que deux conclusions possibles : si le résultat confirme l’hypothèse alors tu viens de faire une mesure ; si le résultat est contraire à l’hypothèse alors tu viens de faire une découverte. »

Enrico Fermi (1901-1954)

Prix Nobel de physique 1938

Incertitudes-type composées

Si $y(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$

$$u(y) = \sqrt{(\alpha u(x_1))^2 + (\beta u(x_2))^2}$$

Si $y(x_1, x_2) = a\, x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\alpha \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\beta \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

Incertitudes-type composées

Si $y(x_1, x_2) = x_1 \pm x_2$

$$u(y) = \sqrt{(u(x_1))^2 + (u(x_2))^2}$$

Si $y(x_1, x_2) = a\, x_1 * x_2$ ou $y(x_1, x_2) = a\, x_1 / x_2$

$$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

Sinon calcul grâce aux simulations de Monte-Carlo

Incertitudes-type composées
Simulation de Monte-Carlo

Connaissance de $x_1 \pm u(x_1)$ et $x_2 \pm u(x_2)$

$\Downarrow$

Calcul de $y = f(x_1, x_2)$

Quel résultat pour y ?

- Tirages aléatoires de x_1^k et x_2^k
  et calcul pour chaque tirage des y^k

$\Downarrow$

y = Valeur moyenne des y^k +- Écart-type de la série des y^k