

1. But du mesurage

La mesure d'une grandeur physique ne peut donner comme résultat une unique valeur car il existe de nombreuses causes de variabilité d'une mesure à l'origine d'incertitudes. Cette variabilité peut être liée aux instruments de mesure, à l'opérateur, à l'environnement, à la méthode de mesure ou aux processus physiques eux-mêmes. Ainsi le résultat d'une mesure n'est pas une valeur unique mais un ensemble de valeurs numériques, raisonnablement attribuables à la grandeur d'intérêt. La valeur mesurée est une valeur particulière de cet ensemble.

Pour chaque mesure, on évalue l'incertitude-type soit par une approche statistique (type A) soit par une autre approche quand des mesures répétées ne sont pas possibles (type B).

2. L'incertitude-type

2.1. Définition

La quantification de la variabilité d'une mesure x d'une grandeur est appelée **incertitude-type** et notée **$u(x)$** .

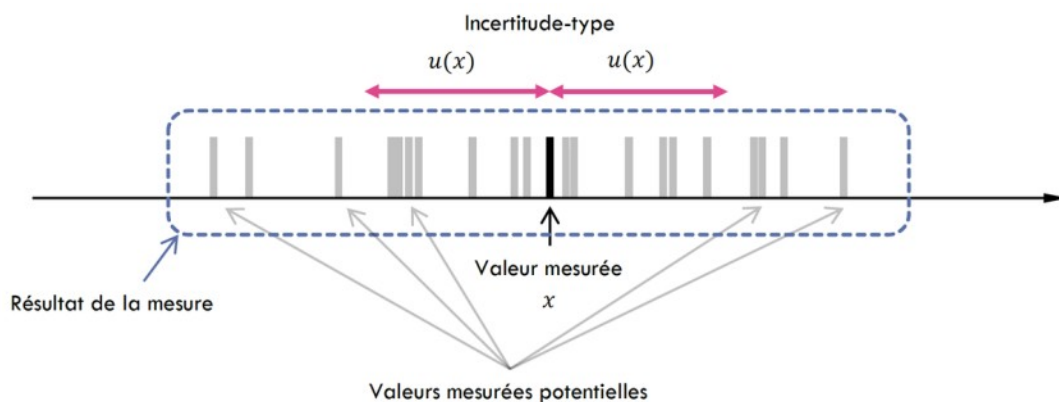
Par définition, l'incertitude-type correspond à l'**écart-type** de la distribution des données issues d'une répétition de la mesure.¹

Le résultat d'une mesure est en général noté $x \pm u(x)$

L'usage est que l'incertitude-type soit donnée avec **deux chiffres significatifs** et que l'écriture du résultat de la mesure soit en cohérence avec celui de l'incertitude-type (unité identique du dernier digit).

Remarques

- pour estimer l'incertitude-type du résultat d'une **unique** mesure, il faut donc répéter un grand nombre de fois le processus de mesure. Cette répétition et les valeurs supplémentaires servent uniquement à estimer la variabilité du processus de mesure.
- Propriété : La variabilité d'un processus de mesure avec un protocole, du matériel et des conditions expérimentales données, impliquant une ou plusieurs personnes dans l'expérience, est mesurée par une unique incertitude-type.
- $\frac{u(x)}{x}$ est l'**incertitude type relative** et s'exprime en général en pourcentage



¹ L'incertitude(-type) est donc une évaluation de l'écart-type de l'ensemble des grandeurs raisonnablement attribuables au mesurande.

2.2. Estimation du résultat d'une mesure et de l'incertitude-type

a) Cas de mesures répétées : incertitude de type A

Lorsqu'un même opérateur réalise plusieurs fois la mesure de la même grandeur, dans les « mêmes » conditions expérimentales, il peut trouver des résultats différents. Il en est de même d'opérateurs différents réalisant simultanément la mesure de la même grandeur avec du matériel similaire. On utilise des notions de statistiques (moyenne et écart type) pour analyser les résultats.

Pour une série de n mesures indépendantes donnant des valeurs mesurées x_k :

- $\bar{x}$ est la valeur moyenne $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i$
- l'écart-type ou incertitude-type sur une mesure unique est $\sigma = u_{\text{exp}}(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})^2}$
- L'incertitude-type sur la moyenne des mesures est donnée par $u(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Remarque : interprétation de l'incertitude-type

La figure 1 représente une distribution de mesures ainsi que l'incertitude-type. On constate qu'en moyenne deux valeurs prises au hasard sont séparées de quelques $u(x)$. Toutefois, on constate aussi que quelques points sont très éloignés des autres. Il ne s'agit pas de points aberrants, mais de valeurs dans des domaines peu fréquents car peu probables mais tout de même possibles.

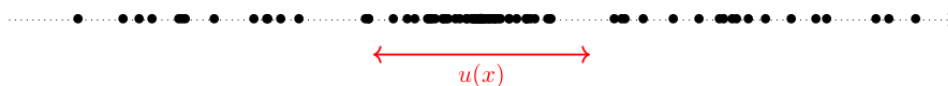


Fig. 1 – Représentation d'une série de 100 mesures d'une grandeur x ainsi que de la largeur de l'incertitude-type de cet ensemble.

b) Cas d'une mesure unique : incertitude de type B

Lorsqu'une mesure ne peut pas être reproduite plusieurs fois, il est impossible de déterminer une incertitude de mesure de répétabilité.

Dans le cas général, l'estimation de l'incertitude-type se fait avec du bon sens et s'affine avec l'expérience. Par exemple, si les valeurs sont raisonnablement comprises entre $x = m - d$ et $x = m + d$, l'incertitude-type retenue sera

$$u(x) = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Remarques :

- Pour les appareils numériques, la précision est une formule : $x\%$ Lecture + y Digits mais sa nature n'est souvent pas claire.
- La détermination de d dépend des situations et de l'expertise de l'expérimentateur.

3. Les incertitudes-type composées

Très souvent, la mesure expérimentale n'est pas le résultat recherché de l'expérience. Il faut souvent combiner des mesures entre elles pour obtenir le résultat souhaité.

Ainsi, il s'agit d'évaluer l'incertitude-type sur le résultat $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots)$ obtenu à partir des valeurs x_k d'autres grandeurs dont les mesures sont indépendantes.

2 résultat en supposant une répartition uniforme des probabilité sur l'intervalle $[m-d; m+d]$

Quelques cas simples (à connaître) sont présentés ci-dessous :

•	$y(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$ alors	$u(y) = \sqrt{(\alpha u(x_1))^2 + (\beta u(x_2))^2}$
•	$y(x_1, x_2) = a x_1^\alpha x_2^\beta$ alors	$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\alpha \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\beta \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$
En particulier		
•	$y(x_1, x_2) = x_1 \pm x_2$ alors	$u(y) = \sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}$
•	$y(x_1, x_2) = a x_1 * x_2$ ou $y(x_1, x_2) = a \frac{x_1}{x_2}$ alors	$\frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$

Dans les cas plus compliqués, les formules vous seront données³ ou on pourra faire des **simulations de Monte-Carlo** pour évaluer l'incertitude-type sur la valeur d'un résultat qui résultent d'autres mesures associées chacune à une incertitude-type.

4. Vérification d'une loi physique et modèle linéaire

4.1. Vérification de la compatibilité des résultats

- Pour conclure si un résultat expérimental est compatible avec la loi testée, le modèle utilisé, on utilise l'**écart normalisé** $E_N = \frac{\text{valeur mesurée} - \text{valeur ref}}{\text{incertitude type (mesure)}}$ en chacun des points de mesure.
- De même, pour comparer deux valeurs associées à leur incertitude-type, on utilise l'écart normalisé

$$E_N = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}}$$

- Par convention, deux résultats sont considérés compatibles si : $E_N \leq 2$

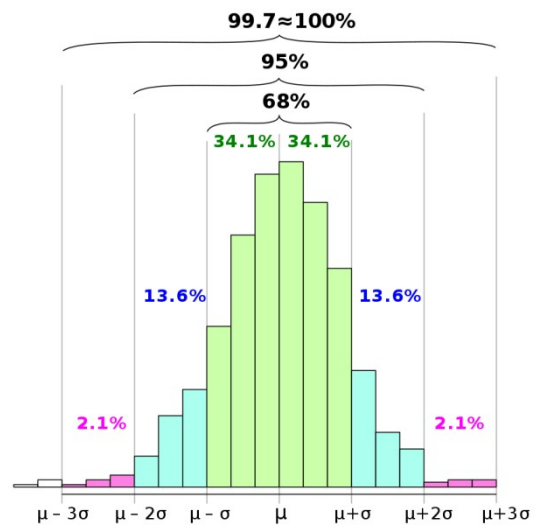


Figure 2 : représentation des probabilités du résultat d'un tirage d'une valeur unique pour une distribution normale

³ De manière générale, lorsque le résultat y est obtenu à partir des valeurs x_k d'autres grandeurs tel que $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et que toutes les grandeurs sont indépendantes alors

$$u^2(y) = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} u(x_k) \right)^2 \quad \text{où } u_k \text{ est l'incertitude-type de chacune des grandeurs } x_k.$$

4.2. Validité d'une régression linéaire (ou d'un modèle d'ajustement)

Exemple introductif :

l'expérience a pour but de vérifier la loi d'Ohm $u= Ri$ dans un résistor de résistance R avec u la tension à ses bornes et i l'intensité traversant le résistor.

L'expérience permet de mesurer un ensemble de couples de valeurs mesurées (u_k, i_k) et on veut valider la relation linéaire entre les deux grandeurs u et i soit $u= Ri$.

Ainsi u correspond à la valeur y et i à la valeur x dans l'énoncé ci-dessous $u= Ri= Rx= y(x)$.

Pour valider ou non la loi d'Ohm, on réalise une régression linéaire des valeurs de la tensions $u_k= y_k$ en fonction des valeurs de l'intensité $i_k= x_k$ et on vérifie que les valeurs de tension estimées par le modèle ne sont pas trop éloignées des valeurs mesurées expérimentalement.

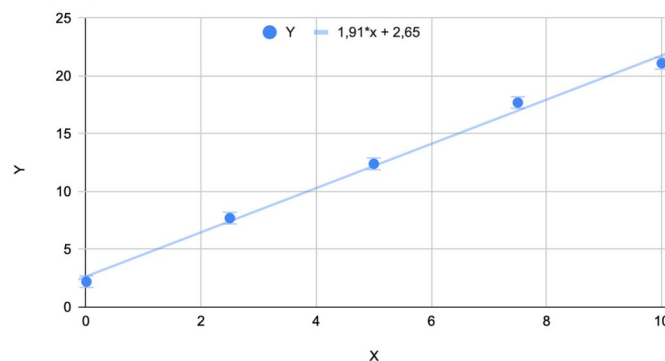
La validation des paramètres de régression linéaire obtenus par un logiciel de régression linéaire peut-être faite :

- par analyse graphique en intégrant les barres d'incertitude : la droite de régression doit passer par les « barres d'incertitude à 2 sigma » de chacun des points expérimentaux
- par analyse des **résidus** $y_k - y(x_k)$ ou des **écarts normalisés** $\frac{y_k - y(x_k)}{u(y_k)}$ avec $y(x)$ l'équation de la droite de régression linéaire, y_k la valeur expérimentale de la grandeur aux points de mesure caractérisés par x_k .

La **droite de régression linéaire est compatible avec les résultats** si :

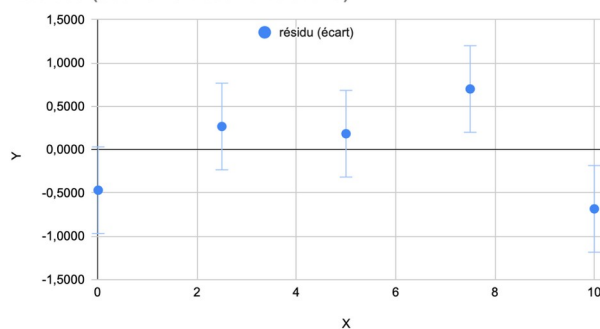
- les valeurs obtenues sont aléatoirement réparties autour de zéro
- les résidus sont du même ordre de grandeur que l'incertitude
- les écarts normalisés sont inférieurs à deux

Graphique cartésien

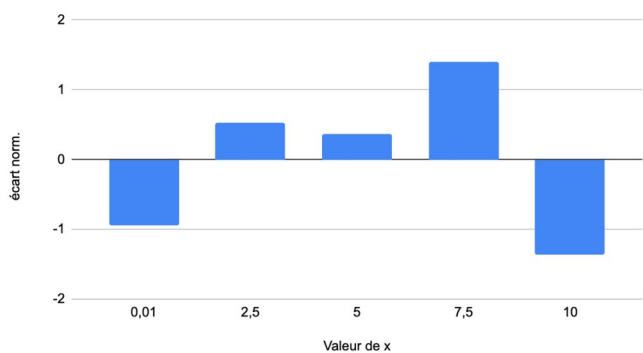


Les barres d'incertitude sont tracées ici à un écart-type et donc si elles sont prolongées à deux écarts-type, elles passent toutes par la droite modèle ce qui valide la régression linéaire.

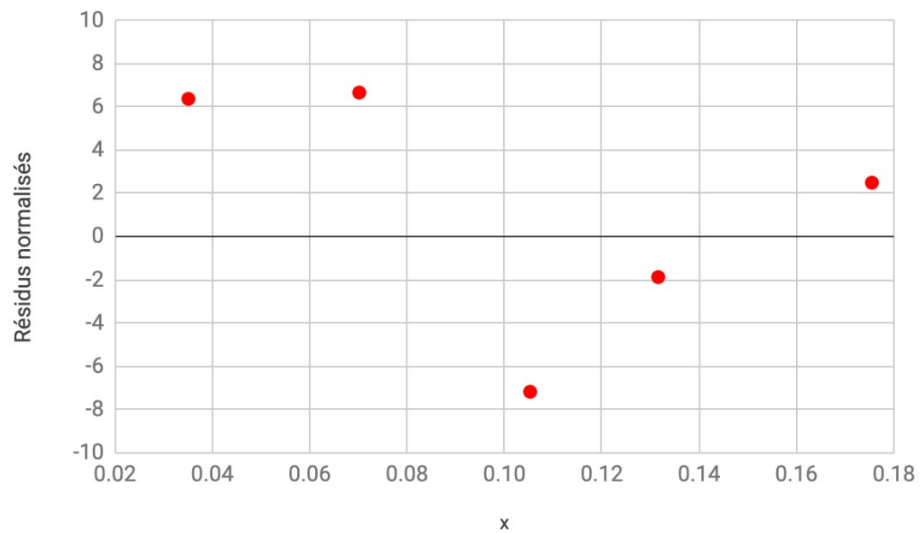
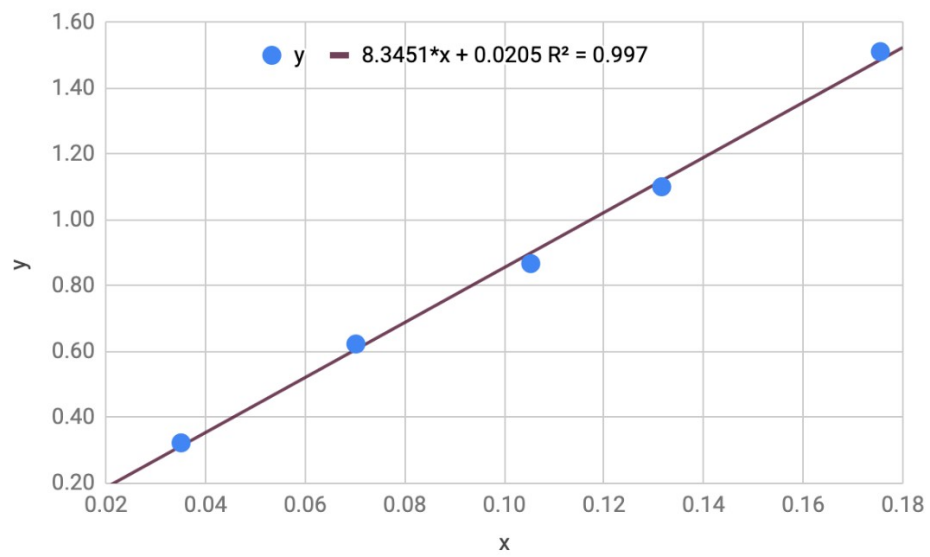
Résidus (écarts verticaux à la droite)



Écarts normalisés



Remarque : le coefficient de corrélation R^2 n'est pas un bon indicateur



Cas d'une régression linéaire non compatible avec les résultats expérimentaux mais dont le coefficient de corrélation est proche de 1