

Révisions pour les écrits

1 Lundi : Algèbre et probabilités

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre n , $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles d'ordre n et $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices lignes réelles d'ordre n .

Partie I – Exemples

On suppose que $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On définit les matrices aléatoires :

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = U \times U^T = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1X_2 & X_1X_3 & \cdots & \cdots & X_1X_n \\ X_2X_1 & X_2^2 & X_2X_3 & \cdots & \cdots & X_2X_n \\ X_3X_1 & X_3X_2 & X_3^2 & \cdots & \cdots & X_3X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_nX_1 & X_nX_2 & X_nX_3 & \cdots & \cdots & X_n^2 \end{pmatrix}.$$

1. On pose $Y = \text{rg}(M)$.
Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1 - p)^n$.
2. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $\text{tr}(M)$.
3. Vérifier que $M^2 = \text{tr}(M)M$ et en déduire la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection. »
4. Dans cette question, on suppose que $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit la matrice M comme ci-dessus. Avec ces nouvelles hypothèses, calculer à nouveau la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection. »
5. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donner son rang et sa trace, puis la diagonaliser (on précisera une matrice de passage).
6. Donner (en justifiant) une matrice d'ordre 3 de rang 1 non diagonalisable. Préciser sa trace.

Partie II – Résultats généraux

Dans cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang égal à 1.

7. On note $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la première colonne non nulle de A . Démontrer qu'il existe une matrice ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A = C \times L$.
8. Calculer le réel $L \times C$ et en déduire que $A^2 = \text{tr}(A)A$.
9. Déterminer le polynôme caractéristique de A ainsi que son polynôme minimal.
10. Établir que

$$A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \text{tr}(A) \neq 0.$$

On note désormais u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A .

11. On suppose que $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Justifier que $\text{Im}(u) \subseteq \text{Ker}(u)$, puis qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

12. On suppose que $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) \\ 0 & 0 & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un réel non nul.

13. Conclure que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.

2 Jeudi : Algèbre et evn/eve

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel non nul, et on rappelle que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes. On note $D_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices diagonales.

On rappelle que l'on désigne par M^T la transposée d'une matrice M .

Pour alléger les notations, on identifiera les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On désignera par $\mathcal{B} = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\cdot\|$, en posant pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ qui est la norme euclidienne associée

au produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $\mathbb{R}^n$ où par définition, pour tout X et Y de $\mathbb{R}^n$, $\langle X, Y \rangle = X^T Y$.

Pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note $\rho(M)$ le réel défini par : $\rho(M) = \max_{\lambda \in \text{Sp}_\mathbb{C}(M)} |\lambda|$.

On note par ailleurs $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie A - Construction d'une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

On se propose dans cette partie de montrer que l'application N donnée sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$N : A \mapsto \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$$

est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'en étudier quelques propriétés.

I - Étude de l'application N

Dans toute cette partie, on considère A une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on note $L_1, L_2, \dots, L_n$ les n lignes et $C_1, C_2, \dots, C_n$ les n colonnes, que l'on pourra identifier à des éléments de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|X\| = 1$. En notant $M = \max_{1 \leq i \leq n} \|L_i\|$, montrer que :

$$\|AX\| \leq M\sqrt{n}.$$

On pourra au préalable s'intéresser à la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice AX et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

2. En déduire que l'application N est bien définie, puis que : $N(A) = \sup_{X_0 \neq 0} \frac{\|AX_0\|}{\|X_0\|}$.

3. Montrer que l'application N ainsi définie est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. En est-il de même pour l'application $S : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ M & \mapsto \rho(M) \end{cases} \text{ ?}$

5. Soit $\Delta \in D_n(\mathbb{R})$ dont on note $\delta_1, \dots, \delta_n$ les termes diagonaux.

Vérifier que $N(\Delta) = \max_{1 \leq i \leq n} |\delta_i|$.

6. À l'aide de l'application $X \mapsto \|AX\|$, démontrer que : $N(A) = \max_{\|X\|=1} \|AX\|$.

7. Établir que : $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|AX\| \leq N(A)\|X\|$.

8. Soit B une autre matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que :

$$N(AB) \leq N(A)N(B).$$

9. Montrer que : $\max_{1 \leq i \leq n} \|C_i\| \leq N(A)$.

10. Déterminer $N(A)$ dans le cas où toutes les colonnes de A sont nulles, sauf la dernière.

$$\text{En déduire } N(A) \text{ dans le cas où } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II - Cas des matrices orthogonales et symétriques

Dans cette partie, A désigne une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

11. Déterminer $N(U)$.

12. Démontrer que $N(UA)$ et $N(A)$ sont égales.

13. En considérant $X_0 \in \mathbb{R}^n$ où $\|X_0\| = 1$ tel que $\|AX_0\| = N(A)$, démontrer que $N(AU) = N(A)$.

14. On suppose de plus dans cette question uniquement que la matrice A est une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : $N(A) = \rho(A)$.

15. Déterminer $N(A)$ dans le cas où $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Partie B - Conditionnement d'une matrice pour la norme N

On définit sur $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ l'application notée cond par : $\text{cond} : \begin{cases} \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R} \\ A & \mapsto N(A)N(A^{-1}) \end{cases}$

I - Quelques résultats sur le conditionnement

Dans toute cette sous-partie, A désigne une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et U une matrice orthogonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

16. Montrer que : $1 \leq \text{cond}(A)$.
17. Quel lien a-t-on entre $\text{cond}(A)$ et $\text{cond}(\alpha A)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$?
18. Démontrer que $\text{cond}(U) = 1$.
19. Que dire de $\text{cond}(UA)$, $\text{cond}(AU)$ et de $\text{cond}(A)$?

II - Un exemple de minoration du conditionnement d'une matrice

On suppose dans cette partie uniquement que $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ où : $a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 2 & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

20. On considère le vecteur X de $\mathbb{R}^n$ donné par : $X = \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} 2^{n-k} E_k$.

Montrer que $AX = E_n$.

21. Dédurre de ce qui précède que $N(A^{-1}) \geq 2^{n-1}$.
22. Justifier $\|AE_2\| > 2$, pour en déduire que $\text{cond}(A) > 2^n$.

Partie C - Conditionnement pour une matrice réelle inversible

23. Soit S une matrice de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

On considère $\mathcal{C} = (V_1, \dots, V_n)$ une base diagonalisante orthonormée de $\mathbb{R}^n$ où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, V_i est un vecteur propre associé à la valeur propre notée λ_i et où l'on suppose que $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ sont les valeurs propres de S comptées avec leur ordre de multiplicité.

Montrer que : $N(S) = \max_{\|X\|=1} |\langle SX, X \rangle|$.

24. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle.

Démontrer que la matrice $A^T A$ appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ pour établir que $N(A^T A) = N(A)^2$.

25. Dédurre de ce qui précède que pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle : $N(A) = \sqrt{\rho(A^T A)}$.

26. On suppose dans cette question que A est une matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible.

En remarquant que $A^T A = A^{-1} A A^T A$, démontrer que les matrices AA^T et $A^T A$ ont exactement les mêmes valeurs propres.

27. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible. On note μ_m et μ_M respectivement la plus petite et la plus grande des valeurs propres de la matrice $A^T A$ et où l'on suppose que l'on a $0 < \mu_m \leq \mu_M$.

Montrer que : $\text{cond}(A) = \sqrt{\frac{\mu_M}{\mu_m}}$.

28. Exprimer $\text{cond}(A)$ lorsque A appartient à $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ à l'aide des valeurs propres de A en remarquant que $A^T A = A^2$.

Partie D - Calcul explicite de conditionnement

Dans toute cette partie, on désigne par T la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par : $T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & (0) \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ (0) & & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Le but de cette partie est de déterminer la valeur de $\text{cond}(T)$ en commençant par déterminer les éléments propres de la matrice T .

29. Montrer que les valeurs propres de T sont réelles.

30. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \notin (n+1)\mathbb{Z}$. On considère le vecteur U_k de $\mathbb{R}^n$ donné par :

$$U_k = \left(\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right), \dots, \sin\left(\frac{(n-1)k\pi}{n+1}\right), \sin\left(\frac{nk\pi}{n+1}\right) \right).$$

Montrer que U_k est un vecteur propre de T et préciser la valeur propre associée.

31. En déduire l'ensemble des valeurs propres de T .

32. Déterminer alors la valeur de $\text{cond}(T)$.

Partie E - Inégalité de Kantorovich

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et on désigne par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ l'ensemble de ses valeurs propres où l'on suppose que $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ et comptées avec leur ordre de multiplicité, et on désigne par $\mathcal{C} = (V_1, \dots, V_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A .

On se propose d'établir le résultat suivant, appelée inégalité de Kantorovich :

$$(K) : \quad \forall X \in \mathbb{R}^n, \|X\|^4 \leq \langle AX, X \rangle \langle A^{-1}X, X \rangle \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{\text{cond}(A)}} + \sqrt{\text{cond}(A)} \right)^2 \|X\|^4.$$

I - Une première démonstration

On désigne par P le polynôme de $\mathbb{R}[X]$ donné par $P = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_n)X + \lambda_1\lambda_n$.

33. Exprimer $\text{cond}(A)$ à l'aide des valeurs propres de A .

34. On admet que l'application $(\cdot, \cdot)_A : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) & \mapsto \langle AX, Y \rangle \end{cases}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, démontrer que : $\forall X \in \mathbb{R}^n, \|X\|^4 \leq \langle AX, X \rangle \langle A^{-1}X, X \rangle$.

35. Montrer que : $\forall k \in \{1, \dots, n\}, P(\lambda_k) \leq 0$.

36. Déterminer les valeurs propres de la matrice $B = A^{-1}P(A)$ et en déduire que $\langle BX, X \rangle \leq 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

37. Pour $X \in \mathbb{R}^n$ fixé, on désigne par f la fonction polynôme de degré 2 définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto \langle AX, X \rangle \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_n) \|X\|^2 \lambda + \lambda_1 \lambda_n \langle A^{-1}X, X \rangle \end{cases}$$

Vérifier que $f(1) = \langle BX, X \rangle$, montrer que $f(0)f(1) \leq 0$, puis établir que :

$$(\star) : \quad (\lambda_1 + \lambda_n)^2 \|X\|^4 - 4 \langle AX, X \rangle \langle A^{-1}X, X \rangle \lambda_1 \lambda_n \geq 0.$$

38. Déduire de ce qui précède l'inégalité de Kantorovich.

II - Une deuxième démonstration

On admet que, pour établir la relation (K), il suffit de la vérifier pour un vecteur X de norme 1.

Dans toute cette partie, $X = (x_1, \dots, x_n)$ désigne donc un vecteur de $\mathbb{R}^n$ de norme 1 dont les coordonnées sont données dans la base $\mathcal{C}$.

On considère alors un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on définit la variable aléatoire Z par :

$$Z(\Omega) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \text{ et } : \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \mathbb{P}([Z = \lambda_i]) = x_i^2.$$

39. Justifier que l'on définit bien une loi de probabilité pour Z .

40. Justifier que Z et $\frac{1}{Z}$ admettent une espérance, puis les exprimer en fonction de $\langle AX, X \rangle$ et de $\langle A^{-1}X, X \rangle$.

41. En remarquant que la variable aléatoire $(Z - \lambda_1)(Z - \lambda_n)$ est négative, établir l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{Z} \leq \frac{\lambda_1 + \lambda_n - Z}{\lambda_1 \lambda_n}.$$

42. En déduire alors que :

$$\mathbb{E}(Z) \mathbb{E}\left(\frac{1}{Z}\right) \leq -\frac{1}{\lambda_1 \lambda_n} \left(\mathbb{E}(Z) - \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2} \right)^2 + \frac{(\lambda_1 + \lambda_n)^2}{4\lambda_1 \lambda_n}.$$

43. Déduire de ce qui précède la seconde partie de l'inégalité de Kantorovich.

3 Mardi : Matrices et systèmes différentiels

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, I la matrice unité d'ordre m et e_j le j -ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^m$ dont les composantes sont les $\delta_{i,j}$, $i = 1, m$ (on rappelle que $\delta_{i,j}$ est nul si $i \neq j$ et vaut 1 si $i = j$).

On note $(u|v)$ le produit scalaire des vecteurs u et v de $\mathbb{R}^m$. Les vecteurs de $\mathbb{R}^m$ seront assimilés à des matrices colonnes. ${}^t u$ note le transposé du vecteur u .

I. Tridiagonalisation.

Soit u un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^m$; la matrice

$$H = I - 2u {}^t u$$

est la matrice de Householder d'ordre m associée au vecteur u .

1. Montrer que $Hu = -u$ et que $Hv = v$ dès que v est orthogonal à u .
2. Démontrer que H est symétrique et orthogonale.
3. Soit $g \in \mathbb{R}^m$, de composantes γ_i , $1 \leq i \leq m$, un vecteur unitaire non colinéaire à e_1 . On pose $u = (g - e_1)/\sqrt{2(1 - \gamma_1)}$. Montrer que u est unitaire et que $Hg = e_1$.
4. En déduire que si x est un vecteur de $\mathbb{R}^m$ non colinéaire à e_1 , il existe un vecteur unitaire u et une matrice de Householder associée H telle que $Hx = \|x\|e_1$.

Soient c un réel, Q une matrice symétrique réelle d'ordre $m - 1$, $q_{2,1}$ un vecteur de $\mathbb{R}^{m-1}$ et $\widehat{Q} = \begin{pmatrix} c & {}^t q_{2,1} \\ q_{2,1} & Q \end{pmatrix}$ une matrice

définie par blocs. Si H_1 est une matrice de Householder d'ordre $m - 1$, on pose $\widehat{H}_1 = \begin{pmatrix} 1 & {}^t \zeta \\ \zeta & H_1 \end{pmatrix}$ où ζ note le vecteur nul dans $\mathbb{R}^{m-1}$ ainsi que $\widehat{S} = \widehat{H}_1 \widehat{Q} \widehat{H}_1 = (\widehat{\sigma}_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$.

5. Montrer que $\widehat{S}$ est semblable à $\widehat{Q}$ et qu'on peut choisir H_1 de telle sorte que $\widehat{\sigma}_{i,1} = \widehat{\sigma}_{1,i} = 0$ pour $i = 3, m$.

On dit qu'une matrice $T = (\tau_{i,j})_{1 \leq i,j \leq m}$ est tridiagonale si $\tau_{i,j} = 0$ dès que $|i - j| > 1$.

6. En déduire un procédé permettant de déterminer une matrice tridiagonale symétrique semblable à $\widehat{Q}$.

II. Matrices de Jacobi.

Une matrice tridiagonale symétrique réelle est encore appelée matrice de Jacobi. Soit

$$T_0 = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m-1} & b_m \end{pmatrix}$$

une matrice de Jacobi d'ordre m . On pose $a_0 = a_m = 0$ et on suppose que $a_i \neq 0$, $i = 1, m$. On note $\sigma(T_0)$ le spectre de T_0 , c'est à dire l'ensemble de ses valeurs propres.

7. Soit $\lambda \in \sigma(T_0)$ et x un vecteur propre associé de composantes ξ_j , $j = 1, m$. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\xi_m \neq 0$.
8. Démontrer que les sous-espaces propres de T_0 sont de dimension 1. Quel est le cardinal de $\sigma(T_0)$?

III. Paires de Lax.

On remplace désormais les a_i et les b_i par des fonctions à valeurs réelles α_i et β_i de la variable réelle t . On pose alors

$$T(t) = \begin{pmatrix} \beta_1(t) & \alpha_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1(t) & \beta_2(t) & \alpha_2(t) & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha_2(t) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{m-1}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{m-1}(t) & \beta_m(t) \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$U(t) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ -\alpha_1(t) & 0 & \alpha_2(t) & \ddots & \vdots \\ 0 & -\alpha_2(t) & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha_{m-1}(t) \\ 0 & \cdots & 0 & -\alpha_{m-1}(t) & 0 \end{pmatrix}$$

et on étudie le système différentiel non linéaire suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} T'(t) = U(t)T(t) - T(t)U(t), & t \in \mathbb{R} \\ T(0) = T_0 \text{ où } T_0 \text{ est la matrice donnée dans la partie II} \end{cases}$$

dont on admettra qu'il possède une solution et une seule $T(t)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Le couple $(T(t), U(t))$ constitue une *paire de Lax*.

9. Etant donnée $T(t)$ solution de (S) , et donc $U(t)$, démontrer que le système différentiel

$$(S') \quad \begin{cases} V'(t) = U(t)V(t), & t \in \mathbb{R} \\ V(0) = I \end{cases}$$

admet une solution et une seule $V(t)$ sur $\mathbb{R}$.

10. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $V(t)$ solution de (S') est orthogonale.

11. Montrer que ${}^tV(t)T(t)V(t)$ est une matrice constante que l'on déterminera. Les valeurs propres de $T(t)$ dépendent-elles de t ?

On montre facilement, et on admettra, que le système différentiel (S) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$(ST) \quad \begin{cases} \alpha'_i(t) = \alpha_i(t)(\beta_{i+1}(t) - \beta_i(t)), & i = 1, m-1 \\ \beta'_i(t) = 2(\alpha_i^2(t) - \alpha_{i-1}^2(t)), & i = 1, m \end{cases}$$

avec $\alpha_i(0) = a_i$, $i = 1, m-1$, $\beta_i(0) = b_i$, $i = 1, m$ et $\alpha_0(t) = 0 = \alpha_m(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. C'est le système de Toda.

IV. Etude asymptotique.

Pour tout réel t , on pose

$$L(t) = \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i^2(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \beta_i^2(t).$$

12. Montrer que la fonction L est constante. En déduire que les fonctions β_i sont bornées sur $\mathbb{R}$, soit par D .

13. Pour $1 \leq i \leq m-1$, montrer que $2 \int_0^t \alpha_i^2(t) dt = \sum_{j=1, i} (\beta_j(t) - b_j)$ et en déduire que les α_i^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

14. En déduire que les $\beta_i(t)$, $i = 1, m$, possèdent une limite lorsque $t \rightarrow \pm\infty$.

15. Déduire des résultats des questions précédentes que la fonction $\alpha_i \alpha'_i$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. En déduire la limite de $\alpha_i(t)$ lorsque $t \rightarrow \pm\infty$.

On note $\chi_t(\lambda) = \det(\lambda I - T(t))$ le polynôme caractéristique de la matrice $T(t)$ et λ_i , $i = 1, m$, les valeurs propres de $T(t)$ rangées dans l'ordre décroissant.

Les limites de $\beta_i(t)$ pour $t \rightarrow +\infty$ ou $t \rightarrow -\infty$ seront respectivement notées β_i^+ et β_i^- ; l'ensemble des β_i^+ , $i = 1, m$, sera noté B^+ et celui des β_i^- sera noté B^- .

16. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_t(\lambda)$ tend vers $\prod_{i=1, m} (\lambda - \beta_i^+)$ (respectivement vers $\prod_{i=1, m} (\lambda - \beta_i^-)$) lorsque $t \rightarrow +\infty$ (respectivement $-\infty$).

17. En déduire que $\sigma(T) = B^+ = B^-$.

On rappelle que, par hypothèse, $\alpha_i(0) = a_i \neq 0$, $i = 1, m-1$.

Pour i fixé compris entre 1 et $m-1$, on note $A^+ = \{t > 0 / \alpha_i(t) = 0\}$ et $A^- = \{t < 0 / \alpha_i(t) = 0\}$.

18. On suppose que A^+ n'est pas vide et on pose $\tau = \inf\{t / t \in A^+\}$. Déterminer la valeur de $\alpha_i(\tau)$ et montrer que pour $t \in]0, \tau[$, $\alpha_i(t)$ est du même signe que a_i .

19. En supposant toujours que A^+ n'est pas vide, montrer que

$$\forall t \in [0, \tau[, \quad |\ln |\alpha_i(t)|| - \ln |\alpha_i(0)| \leq 2D\tau.$$

En déduire que nécessairement $A^+ = \emptyset$, puis que α_i ne s'annule en aucun point de $\mathbb{R}$.

20. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\beta_{i+1}^+ < \beta_i^+$, $i = 1, m-1$. En déduire que $\beta_i^+ = \lambda_i$, $i = 1, m$.

21. Montrer que si δ est choisi tel que $0 < \delta < \beta_i^+ - \beta_{i+1}^+$, $i = 1, m-1$, alors il existe S et C strictement positifs tels que $\forall s > S$, $|\alpha_i(s)| < Ce^{-\delta s}$, $i = 1, m-1$. En déduire qu'il existe $C' > 0$ tel que pour $t > S$, $|\lambda_i - \beta_i(t)| < C'e^{-2\delta t}$, $i = 1, m$.

4 Mercredi : Analyse

Dans tout ce problème, α est un réel de l'intervalle $]0, 1[$. On pose

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx \quad \text{et} \quad J(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$$

Partie I : Calcul d'une intégrale à l'aide d'une série

1. Démontrer que $x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$.
2. Démontrer que $J(\alpha) = I(1-\alpha)$.

On se propose maintenant d'écrire $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

3. 1^{ère} tentative
Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose $f_n(x) = (-1)^n x^{n+\alpha-1}$. Montrer que

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0, 1[$?

4. 2^{ème} tentative
Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{k+\alpha-1}.$$

A l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$I(\alpha) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 S_n(x) dx.$$

En déduire une expression de $I(\alpha)$ sous forme d'une somme de série.

5. En déduire que :

$$I(\alpha) + J(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 - n^2}.$$

On admet la formule suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\alpha x) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2\alpha \cos(nx)}{\alpha^2 - n^2} \right).$$

6. Démontrer que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Partie II - Lien avec la fonction Gamma

Dans toute la suite on pose :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

et

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} e^{-xt} dt.$$

7. Démontrer que Γ est bien définie sur $]0, +\infty[$.
8. Démontrer que f_α est bien définie et continue sur $[0, +\infty[$.
9. Démontrer que f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
10. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$.
11. Démontrer que $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$. En déduire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

Partie III - Vers la formule des compléments

12. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, démontrer que :

$$f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}.$$

13. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on pose :

$$g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

Vérifier que g_α est une solution particulière de l'équation différentielle $y - y' = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

En déduire que $\forall x \in]0, +\infty[$, $f_\alpha(x) = g_\alpha(x)$.

14. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \Gamma(\alpha) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt.$$

15. Démontrer l'identité suivante (formule des compléments) :

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

16. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

5 Vendredi : Probabilités et analyse

Dans tout le sujet, on fixe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur lequel toutes les variables aléatoires considérées sont définies. On utilisera systématiquement la locution « variable aléatoire » pour parler d'une variable aléatoire discrète, et « variable aléatoire entière » pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On pourra noter

$$X(\Omega) = \{x_n, n \in I\}$$

où I est un sous-ensemble fini ou dénombrable de $\mathbb{N}$ et $x_n \in \mathbb{R}$ pour tout $n \in I$.

Définition 5.1 (Dispersion d'ordre α) On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On dit que X **vérifie la condition** $(\mathcal{D}_\alpha)$ - dite de dispersion d'ordre α - lorsque, quand n tend vers $+\infty$,

$$P(|X| \geq n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Définition 5.2 (Variables aléatoires symétriques) On dit que X est **symétrique** lorsque $-X$ suit la même loi que X , autrement dit lorsque

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = P(X = -x).$$

On admet le principe de transfert de l'égalité en loi :

Théorème 5.1 Etant donné deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans un même ensemble E , ainsi qu'une application $u : E \rightarrow F$, si X et Y suivent la même loi, alors $u(X)$ et $u(Y)$ aussi.

Dans tout le sujet, on se donne une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires entières, mutuellement indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. On admet que sous ces conditions la variable X_{n+1} est indépendante de $X_1 + \dots + X_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$$

appelée n -ième moyenne empirique des variables X_k . L'objectif du sujet est d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables M_n .

Les trois premières parties du sujet sont totalement indépendantes les unes des autres.

Questions de cours

1. Soit X une variable aléatoire. Rappeler la définition de « X est d'espérance finie ». Montrer alors que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.
2. Soit X une variable aléatoire. Montrer que si X est bornée, autrement dit s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $P(|X| \leq M) = 1$, alors X est d'espérance finie.

Généralités sur les variables aléatoires

3. Soit X une variable aléatoire entière vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$. Montrer que X n'est pas d'espérance finie, et que X^2 non plus.
4. Soit X une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire. Montrer que $f(X)$ est symétrique et que si $f(X)$ est d'espérance finie alors $E(f(X)) = 0$.
5. Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de $(-X, -Y)$ à celle de (X, Y) , démontrer que $X + Y$ est symétrique.

Deux sommes de séries

On fixe ici un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leq 1$. On introduit la fonction

$$L : t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1 - uz} du.$$

6. Montrer que, sur le segment $[0, 1]$, la fonction L est convenablement définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Donner une expression simple de sa dérivée n -ième pour tout $n \geq 1$.
7. Justifier que pour tout $t \in]0, 1]$, on a $1 - t \leq |1 - tz|$, et plus précisément encore que $1 - t < |1 - tz|$.
8. En déduire successivement que

$$\int_0^1 \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

9. En déduire, grâce à une formule de Taylor, que $L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$.

10. Montrer que la fonction

$$\gamma : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow \mathbb{R} \\ (t, u) & \mapsto |1 + ue^{it}| \end{cases}$$

est continue. En déduire qu'il existe, pour tout $a \in]0, \pi[$, un réel $m_a > 0$ tel que

$$\forall (t, u) \in [-a, a] \times [0, 1], \quad |1 + ue^{it}| \geq m_a.$$

11. Montrer que la fonction

$$F : t \in]-\pi, \pi[\mapsto \int_0^1 \frac{e^{it}}{1 + ue^{it}} du$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.

12. Montrer que

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \quad F'(t) = -\frac{\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2},$$

et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in]-\pi, \pi[$.

13. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Déduire des questions précédentes que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2 \sin \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

On fixe dans cette partie une variable aléatoire symétrique X . On pose

$$\Phi_X : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto E(\cos(tX)), \end{cases}$$

appelée fonction caractéristique de X .

14. Montrer que Φ_X est bien définie, paire et que $\forall t \in \mathbb{R}, |\Phi_X(t)| \leq 1$.

15. En utilisant le théorème de transfert, montrer que Φ_X est continue.

Dans la suite de cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$R_n := P(|X| \geq n).$$

16. On fixe $t \in]0, 2\pi[$. Montrer successivement que

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$$

puis

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n [\cos(nt) - \cos((n-1)t)].$$

On pourra établir au préalable la convergence de la série $\sum_n R_n \cos(nt)$.

17. Montrer qu'il existe un nombre réel C tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{\quad} C,$$

et en déduire que, quand t tend vers 0^+ ,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O(\ln(t)) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi\alpha}{2} + o(1).$$

18. Conclure que, quand t tend vers 0^+ ,

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\alpha}{2}t + o(t).$$

La fonction Φ_X est-elle dérivable en 0 ?

Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

19. Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t).$$

20. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, la variable M_n est symétrique et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = (\Phi_{X_1}(t/n))^n.$$

21. En déduire que pour tout réel t ,

$$\Phi_{M_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{\pi\alpha|t|}{2}\right).$$

22. La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

A partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite $(M_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $\frac{\pi\alpha}{2}$, ce qui signifie que pour tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$,

$$P(a \leq M_n \leq b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{2} \int_a^b \frac{du}{u^2 + (\pi\alpha/2)^2}.$$